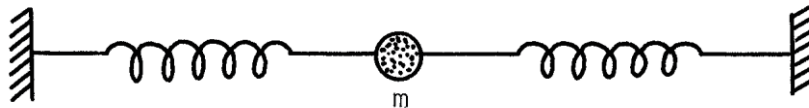


## HOOFDSTUK IV : DE DYNAMICA VAN TRILLINGSBEWEGINGEN

### IV.1 ONGEDEMPTE EN GEDEMPTE TRILLINGSBEWEGING



Figuur IV. 1

In Hoofdstukken I en III werd het probleem van de ongedempte trilling reeds behandeld. Een dergelijk systeem van een massa  $m$  die een terugroepende kracht (Hooke,  $F = -kx$ ) ondergaat, noemt men ook wel een harmonische oscillator. Deze wordt gekenmerkt door een periode  $T_0$ , een pulsatie  $\omega_0$  en frequentie  $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ . Deze parameters worden bepaald door de eigenschappen van het systeem en de frequentie (met index 0) wordt dan ook natuurlijke, karakteristieke of eigenfrequentie  $\nu_0$  van de oscillator genoemd (zie (1.35) of (3.24)) :

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{T_0} \quad (4.1)$$

Zoals in Hoofdstuk III besproken, gaat het hier om een conservatief systeem waarvoor de wet van behoud van mechanische energie geldt. In de praktijk zijn er naast de terugroepende krachten altijd dempende krachten aanwezig. Deze dempende krachten zijn het gevolg van wrijving, waarbij mechanische energie omgezet wordt in warmte. Als voorbeeld van dempende krachten vermelden we de wrijving met de lucht. Het is welbekend dat een slinger door wrijving met de lucht uiteindelijk stil valt. De dempingskrachten zijn afhankelijk van de snelheden van het beschouwde deeltje en zijn, voor wat de zin betreft, tegengesteld aan deze snelheid. In eenvoudige gevallen vindt men met goede benadering dat deze dempingskrachten voor niet te grote snelheden evenredig zijn met de snelheid  $v$ , dus  $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ . De arbeid per tijdseenheid door de dempingskracht geleverd is steeds negatief :

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\alpha \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} < 0 \quad (4.2)$$

Voor een rechtlijnige trillingsbeweging met damping leert de tweede wet van Newton dat

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \alpha v \quad \text{met} \quad v = \frac{dx}{dt} \quad (4.3)$$

Hieruit volgt :

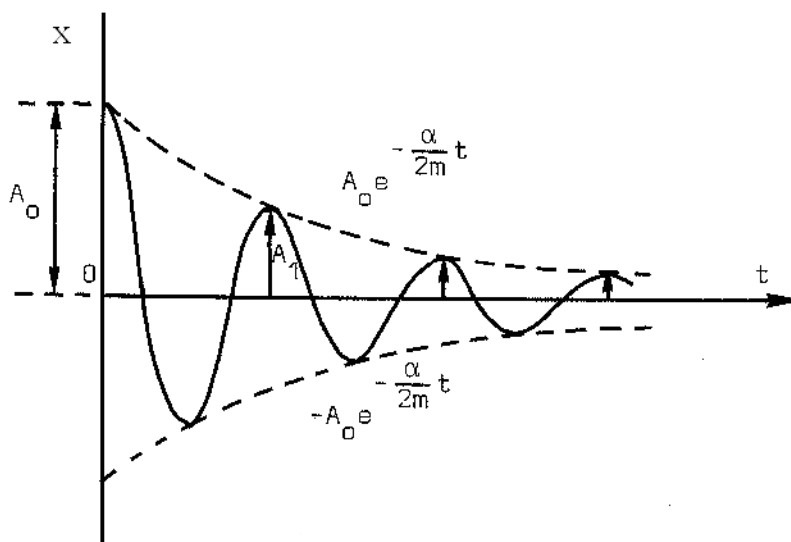
$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (4.4)$$

De oplossing van deze vergelijking kan geschreven worden als

$$x = A_0 e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \quad (4.5)$$

met

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4mk}} \quad \text{en} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4.6)$$



**Figuur IV. 2**

Deze oplossing onderstelt dat  $4mk > \alpha^2$ . Fysisch betekent dit dat de damping niet te sterk mag zijn. In uitdrukking (4.5) zijn  $A_0$  en  $\phi$  twee constanten die nog te bepalen zijn uit de beginvoorwaarden. Van een dergelijke trillingsbeweging kan men zeggen dat het een harmonische trilling is met afnemende amplitude. De periode  $T$  van deze harmonische trilling is groter dan  $T_0$ , de periode zonder damping. Bij de studie van dergelijke trillingen definieert men het logaritmisches decrement  $\delta$  als de logaritme van

de verhouding van twee opeenvolgende maximale uitwijkingen  $A_{n-1}$  en  $A_n$  :

$$\delta = \ln \frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{\alpha T}{2m} \quad (4.7)$$

Bij sterke demping waarvoor  $\alpha^2 > 4mk$  heeft de oplossing niet het karakter van een trilling. De massa  $m$  gaat dan rechtstreeks naar zijn eindstand zonder deze te overschrijden. Bij  $\alpha^2 = 4mk$  wordt deze eindstand het vlugst bereikt en men zegt dat het systeem kritisch gedempt is.

## IV.2 GEDWONGEN TRILLINGEN

Wanneer een periodieke kracht inwerkt op een lichaam dat elastisch gebonden is, geeft dit aanleiding tot een gedwongen trilling. Hiervan zijn talrijke voorbeelden bekend. Een draaiende motor, die periodieke krachten veroorzaakt, kan trillingen veroorzaken in zijn omgeving. Het eenvoudigste geval van gedwongen trilling dat zich kan voordoen, is dit ten gevolge van een harmonische kracht  $F_0 \cos \omega t$ . De bewegingsvergelijking is :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (4.8)$$

De algemeenste oplossing van deze vergelijking kan geschreven worden als de som van de algemeenste oplossing van de homogene vergelijking (4.4) en van een particuliere oplossing van deze vergelijking (4.8) zelf (zie cursussen wiskunde). De algemeenste oplossing van (4.4) stelt een gedempte beweging voor en zal bij voldoende lange inwerking van de harmonische kracht  $F_0 \cos \omega t$  volledig verdwenen zijn. We zoeken daarom als oplossing van het vraagstuk een oplossing die zuiver periodiek is met periode  $T = 2\pi/\omega$  en die een particuliere oplossing is van (4.8). We stellen dan een oplossing van de volgende vorm voor :

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \quad (4.9)$$

De berekening van  $A$  en  $\phi$  gebeurt als volgt : uit (4.8) en (4.9) komt er :

$$\begin{aligned} -m\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) - A\omega\alpha \sin(\omega t + \phi) + kA \cos(\omega t + \phi) &= F_0 \cos \omega t \\ \cos(\omega t + \phi) &= \cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi \\ \sin(\omega t + \phi) &= \sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi \end{aligned} \quad (4.10)$$

Hieruit volgt dan :

$$(k - m\omega^2)A(\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) - A\omega\alpha(\sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi) = F_0 \cos \omega t \quad (4.11)$$

Hieraan moet voldaan zijn op alle tijdstippen, dit betekent dat na verzamelen van alle termen met  $\cos \omega t$  en alle termen met  $\sin \omega t$  de respectievelijke coëfficiënten identiek moeten gelijk zijn aan nul. Er komt :

$$\begin{aligned} [(k - m\omega^2) \cos \phi - \omega\alpha \sin \phi]A &= F_0 \\ [-(k - m\omega^2) \sin \phi - \omega\alpha \cos \phi]A &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Gelet op  $\omega_0^2 = k/m$  volgt hieruit

$$\text{tg} \phi = \frac{-\omega\alpha}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (4.13)$$

Voor de amplitude A volgt er dan :

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi - \omega\alpha \sin \phi} = \frac{F_0 / \cos \phi}{m(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega\alpha \text{tg} \phi} \quad (4.14)$$

Gelet op :

$$\frac{1}{\cos^2 \phi} = 1 + \text{tg}^2 \phi \quad (4.15)$$

volgt hieruit :

$$\frac{1}{\cos \phi} = \pm \sqrt{1 + \frac{\omega^2 \alpha^2}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \quad (4.16)$$

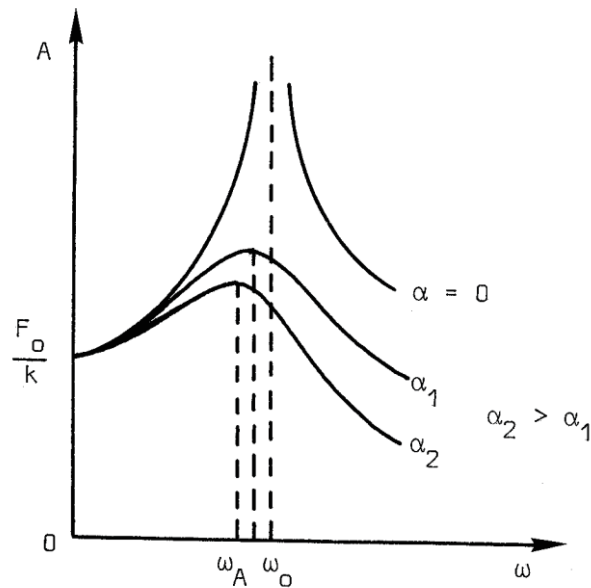
Tenslotte komt er

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}} \quad (4.17)$$

Fig. IV.3 laat de grootte A, de amplitude van de trilbeweging, zien als functie van de pulsatie  $\omega$ . A vertoont een maximum in de buurt van  $\omega = \omega_0$ .

De exacte waarde voor de pulsatie bij het maximum bedraagt

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2m^2}} \quad (4.18)$$



Figuur IV. 3

Bij  $\omega = \omega_A$  is ook de kinetische energie van de oscillator maximaal. Men zegt dat er energie-resonantie is. Bij deze frequentie zijn de snelheid  $dx/dt$  en de inwerkende kracht in fase. Dit is de gunstigste voorwaarde voor overdracht van energie aan de oscillator. Het aan de oscillator geleverd vermogen is immers gelijk aan  $\vec{F} \cdot \vec{v}$  en in deze situatie is dit altijd positief.

#### Opmerking

De in de vorige paragrafen ontwikkelde theorie over gedempte en gedwongen trillingen is ook van toepassing op elk fysisch systeem dat door vergelijkingen van de vorm (4.4) of (4.8) kan beschreven worden. Als interessant voorbeeld vermelden we hier elektrische ketens met wisselspanning (RLC keten).

#### Nuttige Applets/Websites

[https://www.walter-fendt.de/html5/phnl/resonance\\_nl.htm](https://www.walter-fendt.de/html5/phnl/resonance_nl.htm)

<http://www.ketchum.org/tacomacollapse.html>

## Vraagstukken

- Een lichaam met massa  $m = 4 \text{ kg}$  ondergaat een kracht  $F = -\frac{\pi^2}{16} x$  Newton. Op het tijdstip  $t = 2 \text{ s}$  gaat het deeltje door O ( $x=0$ ). De snelheid op het ogenblik  $t = 4 \text{ s}$  bedraagt  $4 \text{ ms}^{-1}$ . Geef de vergelijking van de uitwijking  $x$  als functie van de tijd en bereken de amplitude.

$$(x = 14,4 \sin\left(\frac{\pi}{8} t - \frac{\pi}{4}\right)).$$
- Een lichaam oscilleert volgens  $x = 6,0 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$  meter. Vind :

  - de verplaatsing, snelheid en versnelling op  $t = 2 \text{ s}$
  - de periode en de frequentie
  - teken  $x$ ,  $v$  en  $a$  op  $t = 2 \text{ s}$

(a)  $3 \text{ m}$ ,  $-9\pi\sqrt{3} \text{ ms}^{-1}$ ,  $-27\pi^2 \text{ ms}^{-2}$

b)  $\frac{2}{3} \text{ s}$ ,  $1,5 \text{ s}^{-1}$
- Een deeltje met massa  $1 \text{ g}$  trilt harmonisch met een amplitude van  $2 \text{ mm}$ , de versnelling in een keerpunt is  $8,0 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-2}$ . Bereken de frequentie en de snelheid bij doorgang door de evenwichtsstand. Druk de kracht op het deeltje uit als functie van de plaats en als functie van de tijd.

$$(10^3/\pi \text{ s}^{-1}, 4 \text{ ms}^{-1}, -4 \cdot 10^3 \text{ x N}, -8 \sin(2 \cdot 10^3 t + \alpha) \text{ N}).$$
- Bepaal de vergelijking van de baan van de resulterende beweging van twee onderling loodrechte bewegingen gegeven door  $x = 4 \sin \omega t$  en  $y = 3 \sin(\omega t + \alpha)$  voor  $\alpha = 0, \pi/2, \pi$ . Teken de baan. Construeer ook de baan grafisch.
- Een stalen kogel ( $m = 16 \text{ g}$ ) valt verticaal in een cilinder gevuld met olie, men stelt vast dat de limietsnelheid  $0,60 \text{ ms}^{-1}$  is. Dezelfde kogel wordt vastgehecht aan een veer met  $k = 7,5 \text{ Nm}^{-1}$ , ondergedompeld in de cilinder en tot oscilleren gebracht. Vind de hoekfrequentie wanneer het stelsel zou trillen in afwezigheid van de olie en de algemene uitdrukking van de uitwijking  $x(t)$ . Neem aan dat de viskeuze kracht evenredig is met  $v_L$ .

$$(\omega = 21,65 \text{ rad s}^{-1}, \omega_{\text{olie}} = 20,05 \text{ rad/sec}, x = A e^{-8,175t} \cos(20,05 t)).$$
- Een lichaam, massa  $m = 100 \text{ g}$ , is opgehangen aan een lange verticale spiraalveer. Men trekt het lichaam naar beneden en men brengt het  $10 \text{ cm}$  uit zijn

evenwichtsstand; losgelaten gaat het vibreren om zijn evenwichtspositie met een periode van 2 s.

- 1) Wat is de snelheid als het lichaam passeert door het evenwichtspunt ?
  - 2) Wat is de versnelling als het passeert door een punt 5 cm boven de evenwichtspositie ?
  - 3) Hoeveel tijd is er nodig om, tijdens de opwaartse beweging vanuit 5 cm onder het evenwichtspunt, 5 cm erboven te komen ?
  - 4) Hoeveel zal de veer verkorten als het lichaam verwijderd wordt ?
- ( 1)  $0,314 \text{ ms}^{-1}$  2)  $-0,05 \pi^2$  3)  $0,33 \text{ s}$  4)  $0,99 \text{ m}$ ).





## HOOFDSTUK V : GEOMETRISCHE OPTICA

### V.1. INLEIDING

Licht is een elektromagnetische golf die dus eigenlijk in termen van een golftheorie dient behandeld te worden. Dit impliceert het gebruik van golffronten bij de studie van de voortplanting en het expliciet in rekening brengen van de golflengte van het gebruikte licht. In de fysische optica worden op die manier verschijnselen zoals interferentie en diffractie (buiging) van licht verklaard. Er bestaan echter ook enkele benaderende theorieën die voor bepaalde doeleinden of in bepaalde omstandigheden volstaan om een fysisch verschijnsel te verklaren of tot een praktisch resultaat te komen. Eén van deze theorieën wordt de geometrische of stralenoptica genoemd. Deze reeds oude theorie vindt haar oorsprong in de vaststelling dat het licht zich rechtlijnig voortplant in een homogeen milieu, wat aan de basis ligt van het begrip lichtstraal. Dit is echter maar een benadering die evenwel goed opgaat zolang de oppervlakken en de andere discontinuïteiten die de golf ontmoet bij haar voortplanting, groot zijn t.o.v. haar golflengte. Deze theorie heeft vooral praktisch belang bij de constructie van optische instrumenten. De problemen in deze theorie zijn ofwel zeer eenvoudig ofwel mathematisch vrij ingewikkeld. De hoofdwetten waarop ze steunt worden besproken in de volgende secties.

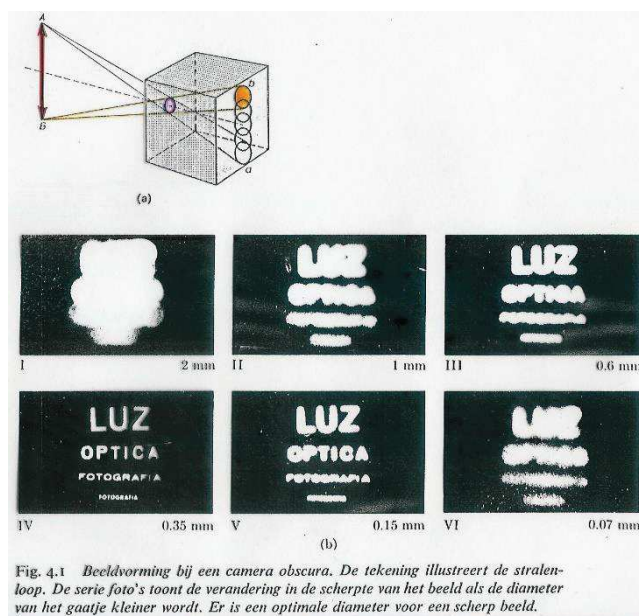


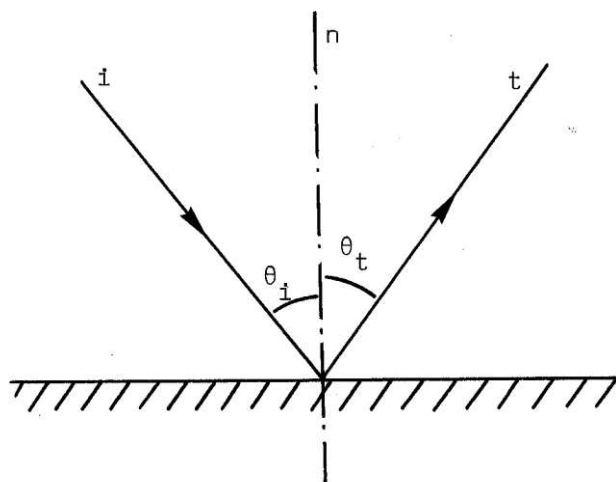
Fig. 4.1 Beeldvorming bij een camera obscura. De tekening illustreert de stralenloop. De serie foto's toont de verandering in de scherpte van het beeld als de diameter van het gaatje kleiner wordt. Er is een optimale diameter voor een scherp beeld.

Een karakteristiek voorbeeld van het gebruik van stralen is de zogenaamde camera obscura. Bij een te grote opening is het beeld onscherp. Wanneer de afmetingen van de opening afnemen, wordt het beeld scherper, maar als de grootte vergelijkbaar wordt met de golflengte van het licht, wordt het beeld minder scherp.

## V.2. DE TERUGKAATSING

We gaan onderstellen dat de afmetingen van de gebruikte apparaten veel groter zijn dan de golflengte van het gebruikte licht, zodat het golfkarakter van het licht niet naar voor treedt.

We laten een lichtbundel invallen op een vlak oppervlak (Fig. V.1).



Figuur V. 1

Deze straal zal zich na terugkaatsing op het oppervlak in een welbepaalde richting voortplanten. We noteren tevens dat licht zich rechtlijnig voortplant zolang het in hetzelfde medium blijft. Licht dat invalt op een vlak oppervlak voldoet aan volgende wetmatigheden:

- de invallende straal  $i$ , de teruggekaatste straal  $t$  en de normaal  $n$  op het oppervlak liggen in één vlak
- de invalshoek  $\theta_i$  is gelijk aan de terugkaatsingshoek  $\theta_t$  :  $\theta_i = \theta_t$

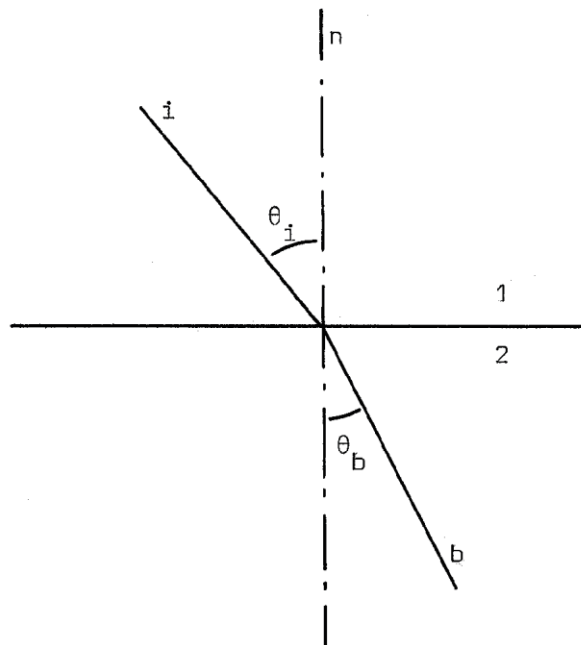
We merken ook op dat we een glad oppervlak lokaal als vlak mogen beschouwen.

## V.3. DE LICHTBREKING

Als men een lichtbundel laat overgaan van een eerste medium naar een tweede, zal de lichtstraal afwijken van zijn oorspronkelijke richting (Fig. V.2). Dit noemt men lichtbreking.

We merken op dat :

- de invallende straal, de gebroken straal en de normaal in één vlak liggen.
- het verband tussen de invalshoek  $\theta_i$  en de brekingshoek  $\theta_b$  te vinden is in de wet van Snel (Nederlandse fysicus. Latijn: Snellius, Engelse literatuur: Snell) :



Figuur V. 2

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_b} = C^{\text{te}} = n_{21} \quad (5.1)$$

De constante die men voorstelt door  $n_{21}$  noemt men de brekingsindex van het tweede medium ten opzichte van het eerste medium. Deze brekingsindex blijkt afhankelijk te zijn van de kleur of golflengte van het gebruikte licht.

Men kan nu ook een absolute brekingsindex definiëren. Deze is dan de brekingsindex van het medium ten opzichte van vacuüm. De absolute brekingsindex van vacuüm zelf kunnen we dan gelijk aan 1 stellen. Men kan nu aantonen dat

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \quad (5.2)$$

met  $n_1$  en  $n_2$  de absolute brekingsindices van de twee media ten opzichte van het vacuüm, zodat we de wet van Snel kunnen schrijven als :

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_b \quad (5.3)$$

De waarde van de absolute brekingsindex is voor alle materialen over het algemeen groter dan 1. Als een stof een kleinere brekingsindex heeft dan een andere, dan zeggen we dat die stof “optisch ijler” is en de andere “optisch dichter”. Uit (5.3) volgt dat, als een lichtstraal van een optisch ijler naar een optisch dichter medium gaat, er breking is naar de normaal toe.

Tabel V.1 : Absolute brekingsindex voor verschillende materialen (bij  $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ )

water	1,33
ethanol	1,36
lucht	1,0003
kroonglas	1,52
flintglas	1,66

#### V.4. TOTALE INWENDIGE TERUGKAATSING

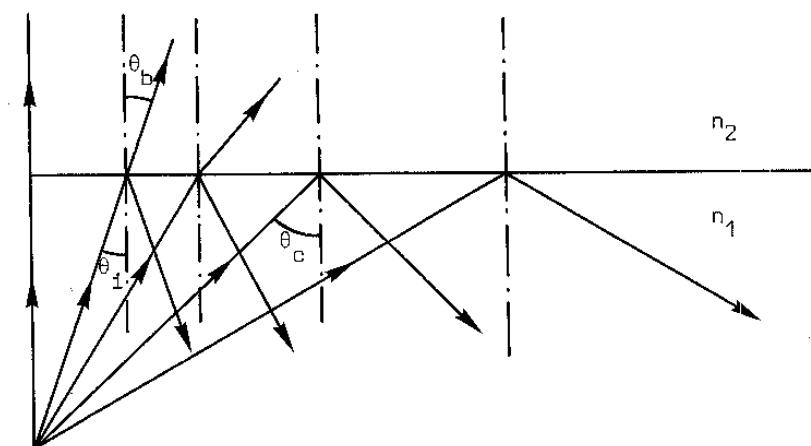
We laten een lichtbundel invallen van een optisch dichtere naar een optisch ijler milieu ( $n_1 > n_2$ ). Als we nu de invalshoek  $\theta_i$  laten toenemen, dan zal de brekingshoek  $\theta_b$ , die steeds groter is dan  $\theta_i$ , eveneens toenemen. Voor een bepaalde invalshoek zal  $\theta_b = 90^\circ$ . De invalshoek die met deze waarde van  $\theta_b$  correspondeert, noemen we de grenshoek of de kritische hoek (critical angle,  $\theta_c$ , zie Fig. V.3). Invalshoeken groter dan deze grenshoek  $\theta_c$  geven aanleiding tot een effect dat men totale inwendige terugkaatsing noemt. Voor deze  $\theta_i > \theta_c$  wordt al de inkomende energie volledig teruggekaatsd in het oorspronkelijke medium.

Men kan de grenshoek  $\theta_c$  vinden door in de betrekking van Snel te stellen dat  $\theta_b = 90^\circ$ .

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90^\circ \quad (5.4)$$

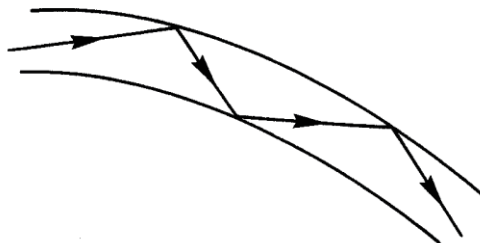
$$\sin \theta_c = n_2/n_1 \quad (5.5)$$

In het geval van een glazen plaat met  $n = 1,5$  vinden we (voor breking naar lucht)  $\theta_c = 41,8^\circ$ .



Figuur V. 3

Toepassing : glasvezeloptiek (fiber optics).



**Figuur V. 4**

Het verschijnsel van totale inwendige terugkaatsing biedt de mogelijkheid om "licht over te brengen" van een plaats naar een andere, zonder veel energieverlies. Men laat licht invallen op het uiteinde van een dunne glasvezel. De lichtstraal zal verschillende totale terugkaatsingen op de wand ondergaan en zo de vorm van de vezel volgen (Fig. V.4). Men kan aldus beelden overbrengen van de ene plaats naar de andere door gebruik te maken van een bundel vezels. Elke vezel zal een klein deel van het beeld overbrengen. Deze bundels zijn zeer buigzaam en worden gebruikt om bijvoorbeeld zeer moeilijk bereikbare plaatsen te belichten. De vezels worden gemaakt uit een glassoort met zeer hoge brekingsindex. Daarop brengt men een laagje glas aan met lage brekingsindex, waarmee de vezels aan elkaar gekit worden.

## **V.5. PRISMA'S**

Een prisma is een veel voorkomend onderdeel van optische instrumenten. De werking ervan steunt op de wetten van lichtbreking en lichtterugkaatsing. We laten een lichtbundel invallen op een zijde van een prisma en we gaan de deviatiehoek  $\delta$  berekenen. De deviatiehoek  $\delta$  is de hoek gevormd door de intredende en de uitredende straal (Fig. V.5).

De lichtbundel ondergaat twee opeenvolgende brekingen. Aan beide oppervlakken kunnen we de wet van Snell toepassen.

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_b \quad (5.6)$$

$$n \sin \phi_i = \sin \phi_b \quad (5.7)$$

Uit figuur V.6 volgt :

$$\delta = \theta_i - \theta_b + \phi_b - \phi_i \quad (5.8)$$

en

$$\theta_b + \phi_i = \alpha \quad (5.9)$$

zodat

$$\delta = \theta_i + \phi_b - \alpha \quad (5.10)$$

Bij toepassingen maakt men vaak gebruik van een opstelling met minimumdeviatie. We gaan  $\theta_i$  beschouwen als onafhankelijk veranderlijke en  $\delta$  als afhankelijk veranderlijke. Na afleiden van betrekking (5.10) bekomen we

$$\frac{d\delta}{d\theta_i} = 1 + \frac{d\phi_b}{d\theta_i} \quad (5.11)$$

$$\frac{d\delta}{d\theta_i} = 1 + \frac{d\phi_b}{d\phi_i} \frac{d\phi_i}{d\theta_b} \frac{d\theta_b}{d\theta_i} \quad (5.12)$$

Uit (5.9) volgt

$$1 + \frac{d\phi_i}{d\theta_b} = 0 \quad (5.13)$$

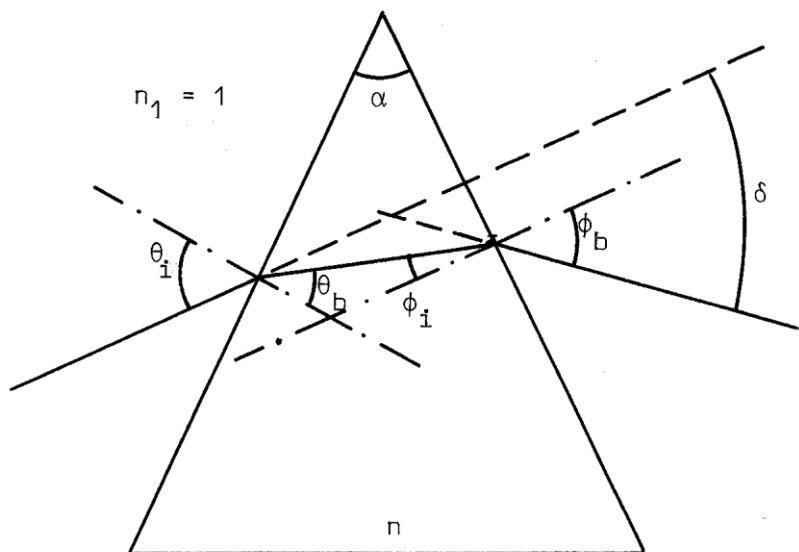
We bekomen

$$\frac{d\delta}{d\theta_i} = 1 - \frac{d\phi_b}{d\phi_i} \frac{d\theta_b}{d\theta_i} \quad (5.14)$$

Uit (5.6) en (5.7) :

$$\theta_i(\theta_b) = \arcsin(n \sin \theta_b) \quad (5.15)$$

$$\phi_b(\phi_i) = \arcsin(n \sin \phi_i) \quad (5.16)$$



Figuur V. 5

Voor het verdere verloop van de berekening is het niet noodzakelijk de afgeleiden  $d\theta_i/d\theta_b$  en  $d\phi_b/d\phi_i$  expliciet te berekenen.

We stellen dat

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_i}{d\theta_b} &= f(\theta_b) \\ \frac{d\phi_b}{d\phi_i} &= f(\phi_i)\end{aligned}\tag{5.17}$$

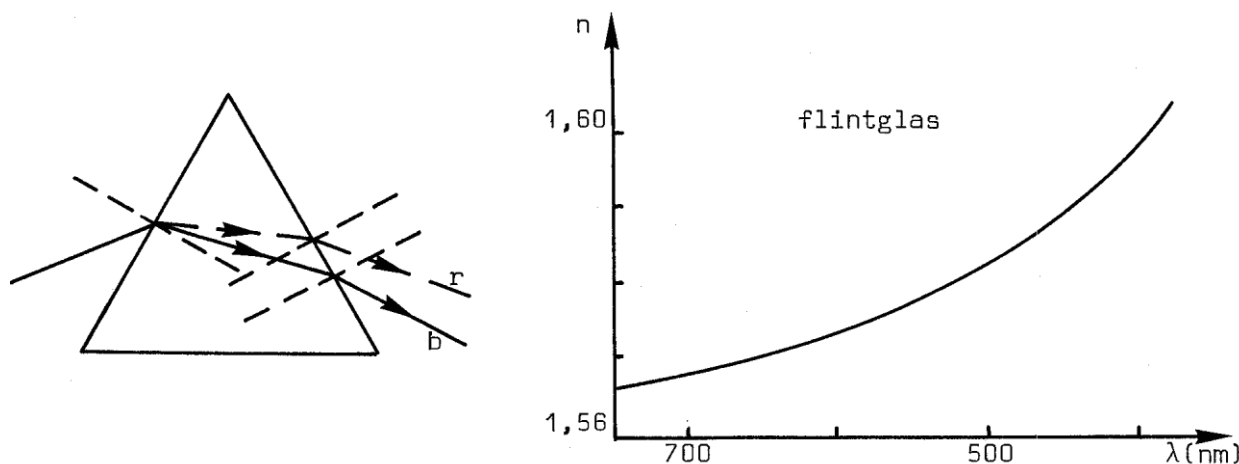
waarbij we opmerken dat de functies identiek zijn (en monotoon in het relevante hoekinterval).

Formule (5.14) wordt dan

$$\frac{d\delta}{d\theta_i} = 1 - \frac{f(\phi_i)}{f(\theta_b)}\tag{5.18}$$

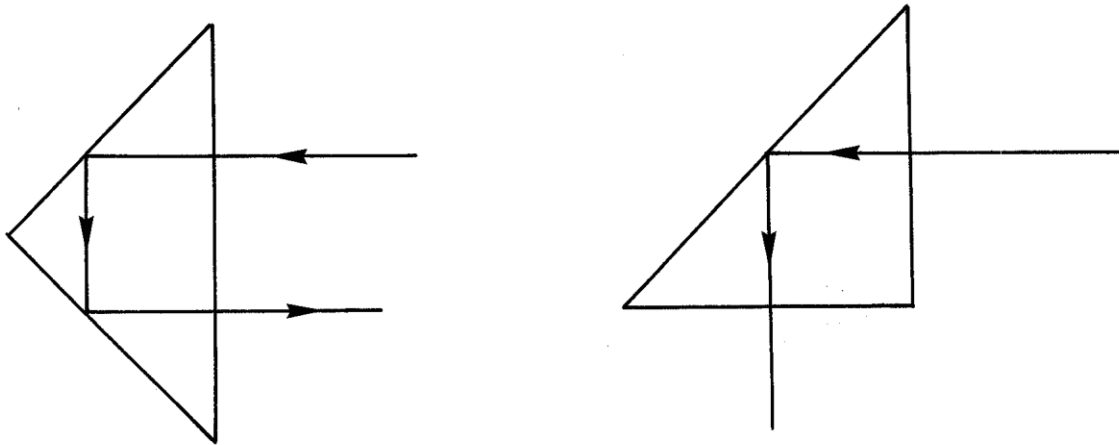
$\delta_{\min}$  vinden we door te stellen :  $d\delta/d\theta_i = 0$  , zodat bij de minimum deviatiehoek  $f(\phi_i) = f(\theta_b)$  en  $\phi_i = \theta_b$  . Hieruit volgt ook  $\theta_i = \phi_b$  . Verder is dan  $\theta_i = (\alpha + \delta_{\min})/2$  en  $\theta_b = \alpha/2$  . Uit (5.6) kan men dan  $n$  berekenen.

Laat men wit licht invallen op een prisma, dan blijkt er een kleurensplitsing op te treden (Fig. V.6). Wit licht bestaat uit golven met een continu kleurenspectrum, die afhankelijk van hun kleur in verschillende mate gebroken worden. Elke lichtkleur komt overeen met een bepaalde golflengte  $\lambda$ . Zichtbare licht bestrijkt een golflengtebereik tussen  $\pm 400$  nm en  $\pm 800$  nm (in lucht of vacuüm). De brekingsindex is functie van de golflengte. Dit verband noemt men de dispersierelatie (Fig. V.6).



Figuur V. 6

Prisma's worden ook gebruikt om lichtstralen in een andere richting af te buigen. Hierbij maakt men gebruik van totale inwendige terugkaatsing (Fig. V.7).



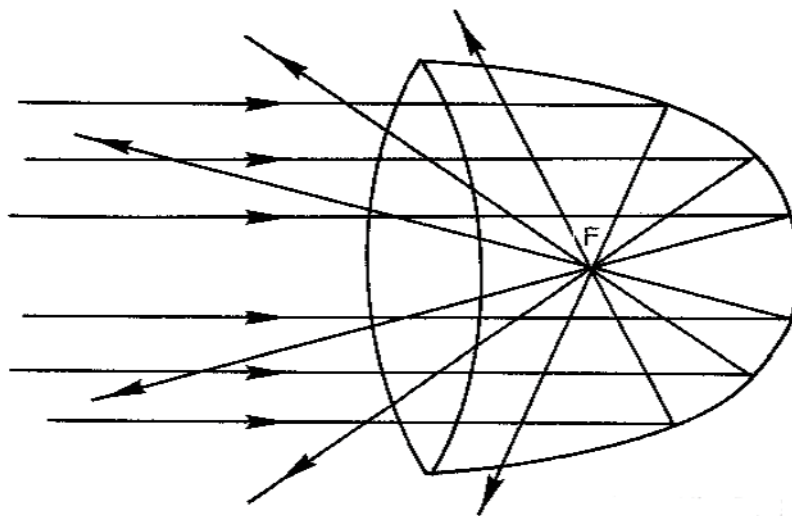
Figuur V. 7

## V.6. SPIEGELS EN LENZEN

In vele optische instrumenten komt het er op aan een scherp niet-vertormd beeld te vormen van een voorwerp. Dit kan gebeuren door middel van spiegels en lenzen waarbij respectievelijk lichtterugkaatsing en lichtbreking optreden. Om aan de gestelde voorwaarden perfect te voldoen, dienen de spiegels en de lenzen een bijzondere geometrie te bezitten. Het bepalen van die vorm is een vrij ingewikkeld mathematisch probleem. Het construeren van dergelijke spiegels en lenzen is bovendien niet eenvoudig. In de praktijk is het veel eenvoudiger sferische oppervlakken te construeren. Daarom, op enkele uitzonderingen na, zijn alle optische instrumenten gebouwd met sferische spiegels en lenzen. Dit gaat ten koste van de gestelde voorwaarden (imperfecte beeldscherpte en beeldvervorming), maar men tracht hieraan zo goed mogelijk te verhelpen door gebruik te maken van systemen met meerdere lenzen van verschillende glastypes. De goede werking van deze systemen is dan ook alleen maar verzekerd voor stralenbundels die voldoende nauw om de as van het stelsel gelegen zijn. Dergelijke bundels noemt men paraxiale bundels.



## V.7. BEELDVORMING BIJ SFERISCHE SPIEGELS



Figuur V. 8

Als een parallelle lichtbundel evenwijdig invalt met de as van een concave (holle) spiegel, die de vorm heeft van een parabolöide, zal hij gefocust worden in een punt  $F$ , het brandpunt van de parabolöide (Fig. V.8). Omgekeerd, alle lichtstralen die door  $F$  gaan, worden omgezet in een parallelle bundel. Een concave sferische spiegel zal zich op dezelfde manier gedragen als we enkel met paraxiale stralen werken.

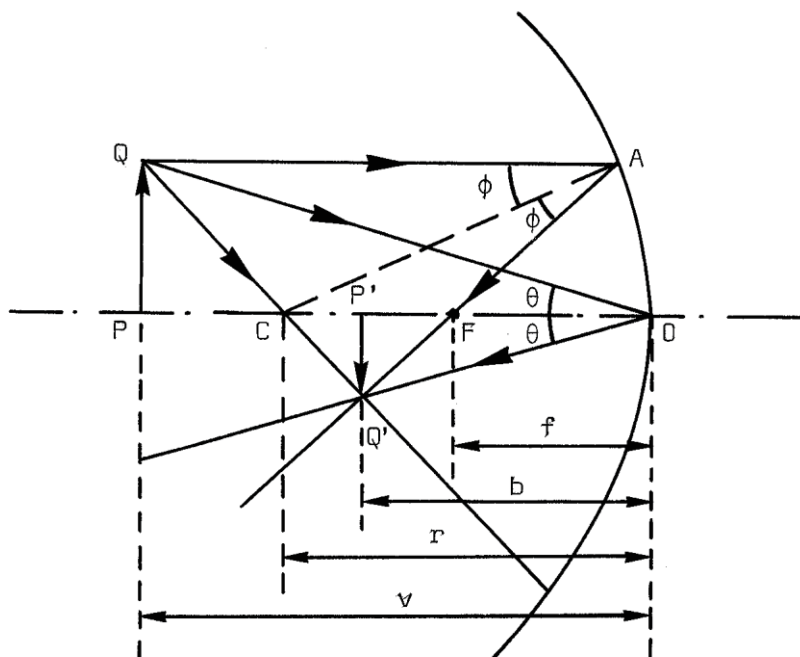
We zullen nu de zogenaamde formule van Descartes (5.21) op 2 manieren afleiden. De eerste procedure is essentieel analoog aan deze gevolgd in sectie V.8 en we verwijzen hiervoor naar de cursusslides. De interpretatie van deze formule is heel belangrijk en als volgt : in de gevolgde paraxiale benadering gaan alle stralen die door een bepaald punt  $P$  van een voorwerp gaan, onafhankelijk van de hoek met de optische as, na reflectie door hetzelfde punt  $P'$  (beeldpunt). Dit rechtvaardigt het gebruik van enkele (eenvoudige) stralen bij de constructie van het beeld, zoals hieronder zal gebeuren.

Het gevormde beeld door een sferische spiegel kan dus gevonden worden door de constructie van enkele bijzondere stralen zoals deze door de pool  $O$  en deze door het centrum  $C$  (Fig. V.9).

De straal  $QO$  die invalt onder een hoek  $\theta$ , wordt teruggekaatst onder dezelfde hoek. Indien het voorwerp  $PQ$  oneindig ver zou liggen, zouden alle stralen evenwijdig zijn aan de as en zouden ze na terugkaatsing door het punt  $F$  gaan. Dit laat ons toe een 3<sup>de</sup> eenvoudige lichtstraal te beschouwen, namelijk  $QA$ .

Men noemt  $F$  het brandpunt van de spiegel en de afstand  $OF$  noemt men de brandpuntsafstand. Uit Fig. V.9 volgt dat de hoeken  $CAF$  en  $ACF$  gelijk zijn, zodat de

driehoek CFA gelijkbenig is en  $CF = FA$ .



Figuur V. 9 ( $f > 0$ ,  $v > 0$ ,  $b > 0$ ,  $r > 0$ ,  $m < 0$ )

Voor kleine hoeken geldt  $FA \cong FO$  zodat  $FO = f = r/2$ . Hierin is  $r$  de kromtestraal van het sferische oppervlak.

Noemt men  $PO$  de voorwerpsafstand  $v$  en  $P'O$  de beeldafstand  $b$  dan bekommen we, gelet op de gelijkvormigheid van de driehoeken  $PQO$  en  $P'Q'O$  :

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{PO}{P'O} = \frac{v}{b} \quad (5.19)$$

Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken  $PQC$  en  $P'Q'C$  halen we

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{PC}{P'C} = \frac{v-r}{r-b} \quad (5.20)$$

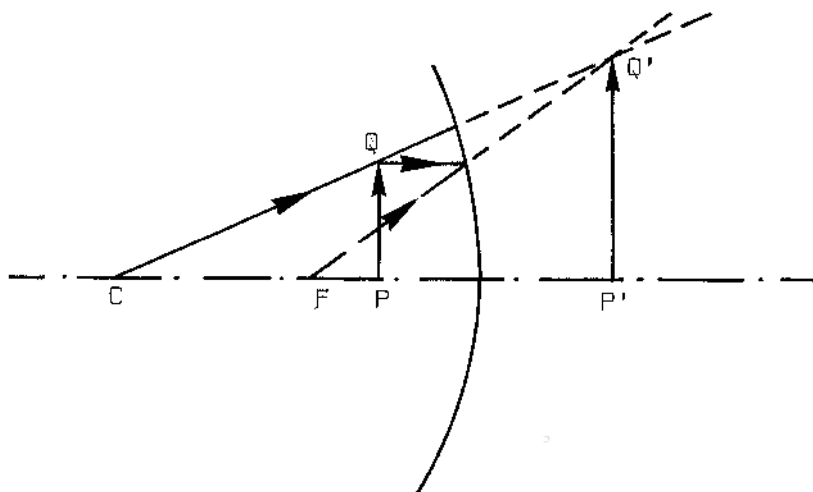
of de formule van Descartes :

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f} \quad (5.21)$$

Bovenstaande betrekking geldt ook in het geval dat  $v < f$ . De berekende waarde van de beeldafstand zal dan negatief zijn. Dit dient geïnterpreteerd te worden als een beeld dat achter de spiegel ligt. We spreken dan van een virtueel beeld. Achter de spiegel is er geen licht aanwezig doch de waarnemer heeft de indruk dat er op die plaats een beeld is (Fig. V.10). In het geval  $v < f$  zullen we een beeld bekommen dat rechtop staat zoals het voorwerp. In het geval  $v > f$  is het beeld omgekeerd ten opzichte van het voorwerp. De vergroting definiëren

we dan als

$$m = -b/v \quad (5.22)$$



Figuur V. 10 ( $f > 0$ ,  $v > 0$ ,  $b < 0$ ,  $r > 0$ ,  $m > 0$ )

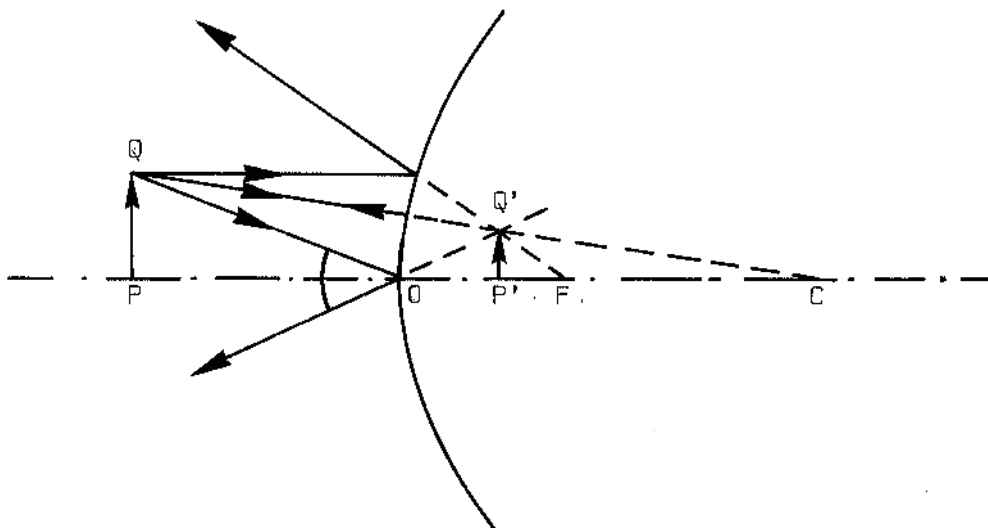
Als  $m > 0$  is het beeld rechtopstaand, als  $m < 0$  is het beeld omgekeerd. De betrekking (5.21) kunnen we ook gebruiken in het geval van een convexe (bolle) sferische spiegel (Fig. V.11). We hebben dan een divergerend systeem en we moeten er rekening mee houden dat  $f$  negatief te nemen is.

We kunnen dan de volgende tekenconventies invoeren :

- 1) als de lichtstraal van links naar rechts loopt, zoals in de figuren, dan zullen de voorwerpsafstanden positief genomen worden wanneer ze links van het spiegelende scheidingsoppervlak liggen en negatief wanneer ze rechts liggen. De beeldafstanden zullen positief genomen worden als ze links (dus aan dezelfde kant van het voorwerp, waar het licht effectief komt) liggen en negatief als ze rechts liggen van het scheidingsoppervlak (waar het licht niet komt).
- 2) de brandpuntsafstanden en kromtestralen worden eveneens positief gerekend wanneer respectievelijk het brandpunt en het middelpunt aan de kant liggen vanwaar het licht komt (reële of R-kant, links in ons geval). De brandpuntsafstanden en kromtestralen worden negatief gerekend wanneer deze punten achter de spiegel liggen (virtuele of V-kant, rechts in ons geval).
- 3) voorwerp- en beeldgrootte zijn positief wanneer ze rechtop staan en negatief wanneer ze omgekeerd staan.

Met deze conventies hebben we in het geval van Fig. V.9 dat  $f$  en  $r$  positief moeten genomen

worden, immers  $f = r/2$ . In Fig. V.10 zijn  $f$  en  $r$  ook positief terwijl in Fig. V.11 beide grootheden negatief zijn.



Figuur V. 11 ( $f < 0$ ,  $v > 0$ ,  $b < 0$ ,  $r < 0$ ,  $m > 0$ )

## V.8. BEELDVORMING AAN EEN SFERISCH

### SCHEIDINGSOPPERVLAK VAN DOORLATENDE MILIEUS

Een systeem bestaande uit één enkel sferisch scheidingsoppervlak aan twee lichtdoorlatende milieus is een zeer weinig voorkomend geval, maar fungeert als inleiding op de (dunne) lenzen ; het is voor wat de theorie betreft op analoge wijze te behandelen als de sferische spiegels.

In Fig. V.12 staat een puntbron P voor een sferisch oppervlak met kromtestraal  $r$ . Het sferisch oppervlak doet dienst als scheiding tussen twee verschillende media gekenmerkt door de brekingsindices  $n_1$  en  $n_2$ . We onderstellen  $n_1 < n_2$ . Het snijpunt P' van de optische as en de gebroken straal vormt het beeld P' van de puntbron P.

Aan het scheidingsoppervlak kunnen we de wet van Snel toepassen :

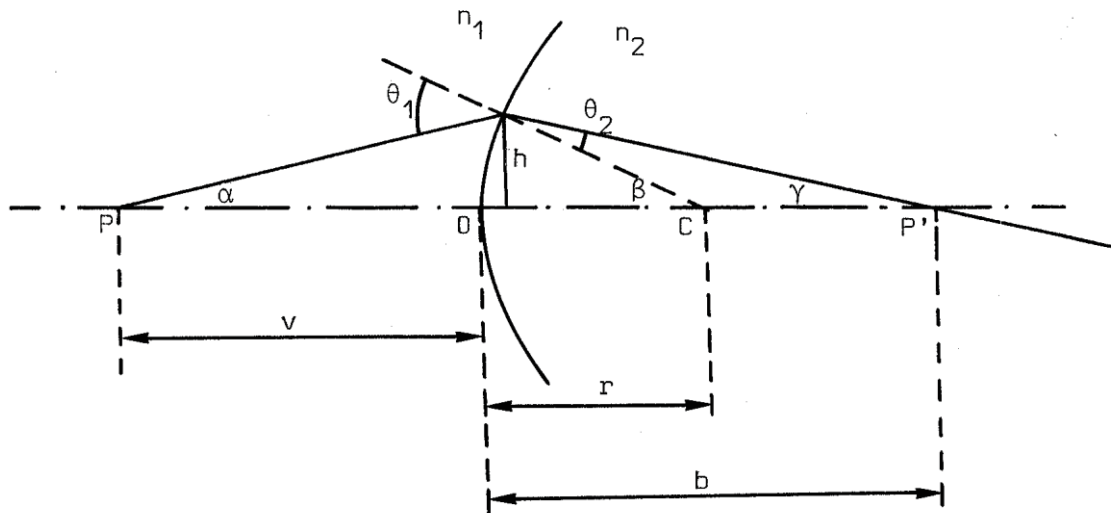
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (5.23)$$

Uit Fig. V.12 volgt :

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad (5.24)$$

$$\theta_2 = \beta - \gamma \quad (5.25)$$

of



Figuur V. 12

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \cong \frac{n_2}{n_1} \quad (5.26)$$

waaruit volgt :

$$n_1 \alpha + n_2 \gamma = \beta (n_2 - n_1) \quad (5.27)$$

Rekening houdend met

$$\text{tg } \alpha \cong h/v \cong \alpha \quad (5.28)$$

$$\text{tg } \beta \cong h/r \cong \beta \quad (5.29)$$

$$\text{tg } \gamma \cong h/b \cong \gamma \quad (5.30)$$

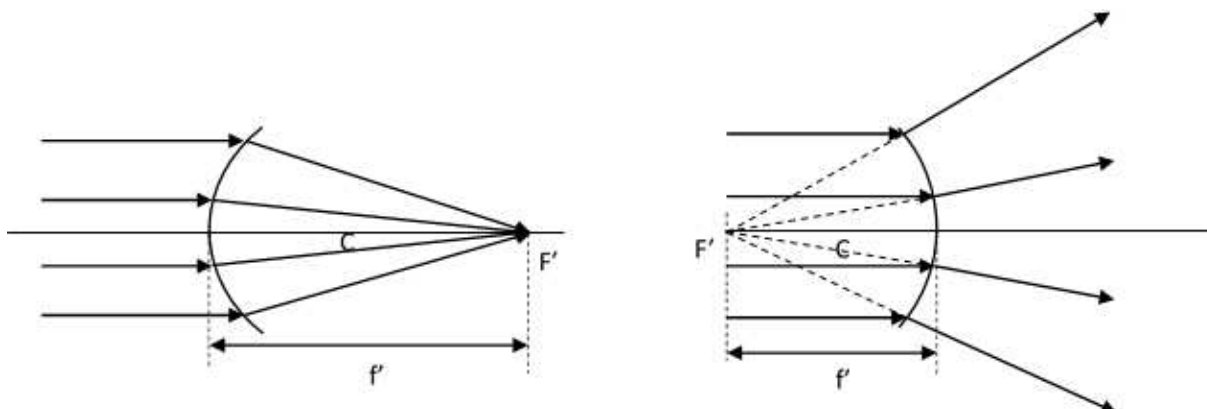
bekomen we de formule van Descartes voor breking

$$\frac{n_1}{v} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (5.31)$$

We kunnen bij sferische oppervlakken dezelfde tekenconventie aannemen als bij sferische spiegels behalve dat de beeldafstand  $b$  en de kromtestraal  $r$  (niet de brandpuntsafstanden  $f$  en  $f'$  die hetzelfde teken hebben, zie formules (5.32) en (5.33)) positief zullen zijn als ze rechts van het scheidingsoppervlak liggen. De kant van de reële beelden (R-kant) is hier dus rechts, waar het licht effectief komt. In het geval van Fig. V.12 en betrekking (5.31) zullen  $v$ ,  $b$  en  $r$  dan positieve numerieke waarden hebben.

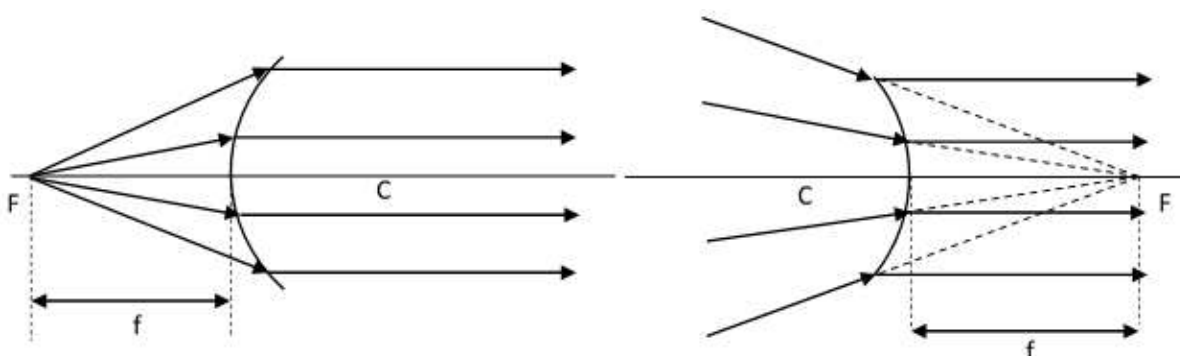
Bij de behandeling van sferische scheidingsoppervlakken en bij lenzen (zie verder) kan men twee brandpunten definiëren. Om het secundaire brandpunt te definiëren, laten we een parallelle bundel invallen. Bij een convergerend systeem wordt de bundel gefocuseerd in het secundaire brandpunt  $F'$  (Fig. V.13, links). Bij een divergerend systeem krijgen we een

divergerende bundel die lijkt te vertrekken vanuit het secundair brandpunt  $F'$  (Fig. V.13, rechts). Hiermee correspondeert dan de secundaire brandpuntsafstand  $f'$ .



Figuur V. 13

De primaire brandpunten liggen aan de tegenovergestelde kant in vergelijking met de secundaire (laat de stralen van de tegenovergestelde kant invallen in vergelijking met de secundaire brandpunten). Wanneer een puntbron wordt geplaatst in het primaire brandpunt, ontstaat er een evenwijdige bundel. Bij een convergerend systeem (Fig. V.14, links) is dit eenvoudig in te zien. Bij een divergerend systeem (Fig. V.14, rechts) is de puntbron in dat geval een virtueel voorwerp, m.a.w. een bundel die zou focuseren in het primaire brandpunt indien het scheidingsoppervlak er niet zou zijn, wordt in een parallelle bundel omgezet. Het vlak loodrecht op de as en door het brandpunt noemt men het brandvlak. Er zijn dus ook twee brandvlakken, respectievelijk het primaire en het secundaire brandvlak genoemd. Beide brandpuntsafstanden zijn positief voor een convergerend systeem en negatief voor een divergerend systeem.



Figuur V. 14

We passen dit alles toe op (5.31). Indien we  $v$  zeer groot laten worden zal  $b$  naar  $f'$  naderen. Er volgt daaruit :

$$\frac{n_2}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (5.32)$$

Op dezelfde manier laten we  $b$  zeer groot worden, zodat  $v$  naar  $f$  nadert. We bekommen dan :

$$\frac{n_1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (5.33)$$

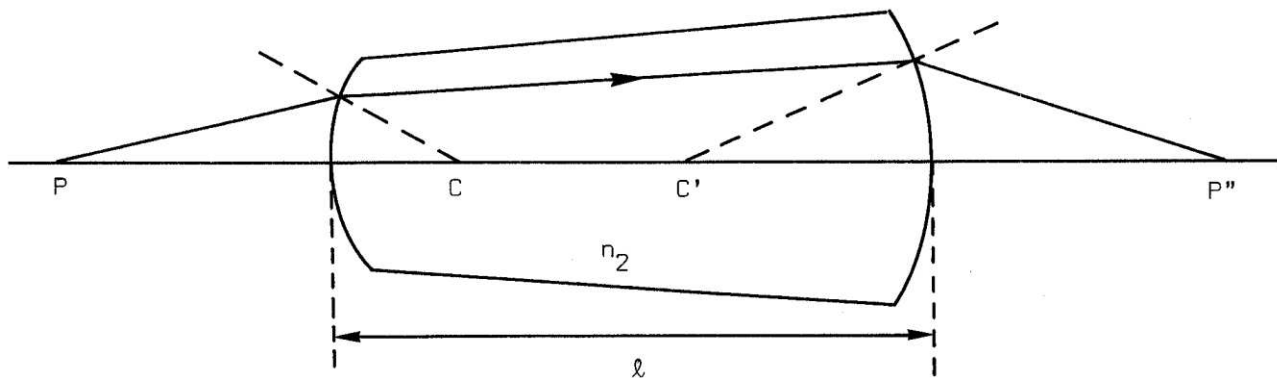
Uit bovenstaande formules kunnen we  $f$  en  $f'$  berekenen en bovenstaande beweringen over de tekens nagaan. Tenslotte hebben we :

$$\frac{n_1}{v} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_1}{f} = \frac{n_2}{f'} \quad (5.34)$$

## V.9. BEELDVORMING BIJ LENZEN

Van zeer groot belang in de praktijk zijn systemen bestaande uit twee sferische oppervlakken. Dergelijke systemen noemt men lenzen. Fig. V.15 geeft een voorbeeld van een lens (vergelijk met Fig. V.12 waar de stralen sterker gebroken werden, bijv. door een grotere brekingsindex). We bestuderen nu wat er aan beide scheidingsvlakken gebeurt. Voor het eerste oppervlak (Fig. V.16) kunnen we de betrekking (5.31) neerschrijven

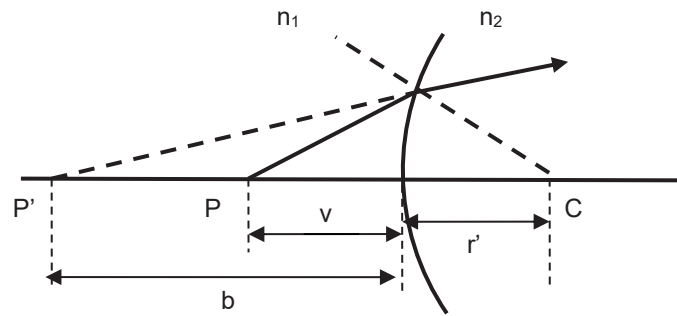
$$\frac{n_1}{v} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r'} \quad (5.35)$$



Figuur V. 15

We kunnen nu het beeld  $P'$  beschouwen als het voorwerp voor het tweede oppervlak (Fig. V.17, de 2 deelfiguren Fig. V.16 en 17 komen slechts kwalitatief overeen met Fig. V.15). We kunnen verder aan het scheidingsoppervlak een analoge betrekking neerschrijven als (5.31) :

$$\frac{n_2}{v'} + \frac{n_1}{b'} = \frac{n_1 - n_2}{r''} \quad (5.36)$$

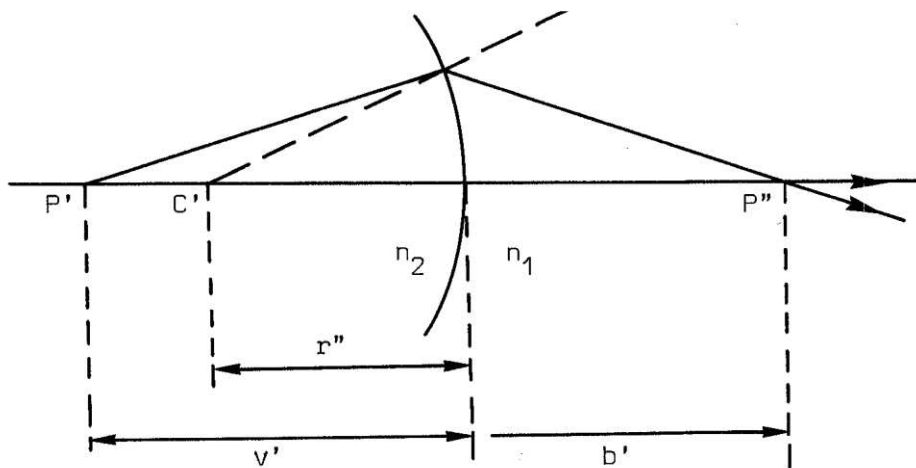


Figuur V. 16

Uit de Figuren V.15, V.16 en V.17 volgt

$$\ell = b + v' \quad (5.37)$$

We brengen dit in (5.36)



Figuur V. 17

$$\frac{n_2}{\ell - b} + \frac{n_1}{b'} = \frac{n_1 - n_2}{r''} \quad (5.38)$$

We onderstellen dat we met dunne lenzen werken zodat  $\ell \cong 0$  en

$$-\frac{n_2}{b} + \frac{n_1}{b'} = \frac{n_1 - n_2}{r''} \quad (5.39)$$

Samentellen van (5.35) en (5.39) geeft

$$\frac{n_1}{v} + \frac{n_1}{b'} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right) \quad (5.40)$$

Als we de uiteindelijke beeldafstand  $b$  noemen, dan bekommen we



$$\frac{n_1}{v} + \frac{n_1}{b} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right) \quad (5.41)$$

We dienen wel op te merken dat deze vergelijking enkel geldig is voor paraxiale bundels en voor dunne lenzen, zodat het geen verschil uitmaakt vanaf welke oppervlakken  $v$  en  $b$  gemeten worden.

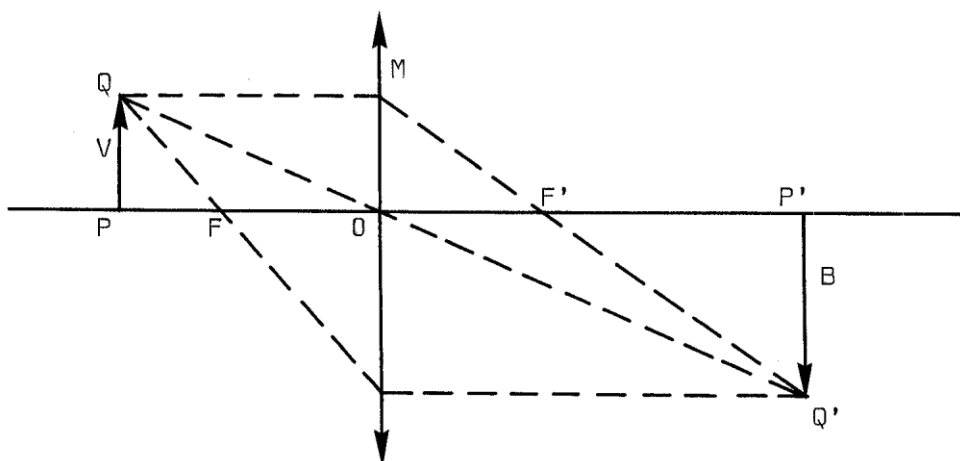
## V.10. AFLEIDEN VAN DE LENZENFORMULE

Uit Fig. V.18 volgt door het beschouwen van de gelijkvormige driehoeken PQO en P'Q'O dat

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{v}{b} \quad (5.42)$$

We vinden ook uit de gelijkvormigheid van de driehoeken MOF' en Q'P'F' dat

$$\frac{OM}{P'Q'} = \frac{PQ}{P'Q'} = \frac{f}{b-f} \quad (5.43)$$



Figuur V. 18 ( $v > 0$ ,  $b > 0$ ,  $f > 0$ ,  $m < 0$ )

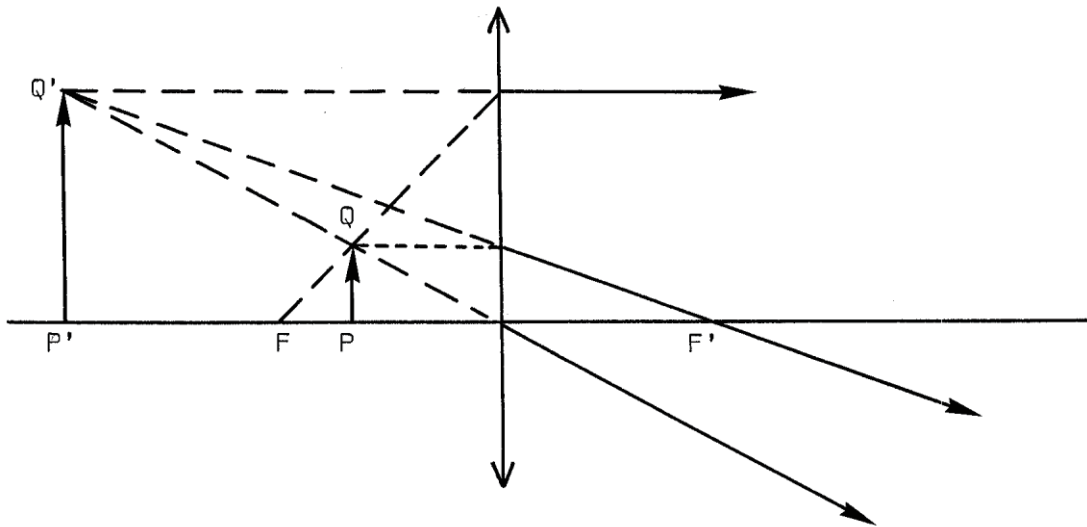
Uit deze beide betrekkingen volgt :

$$\frac{v}{b} = \frac{f}{b-f} \quad \text{of} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} \quad (5.44)$$

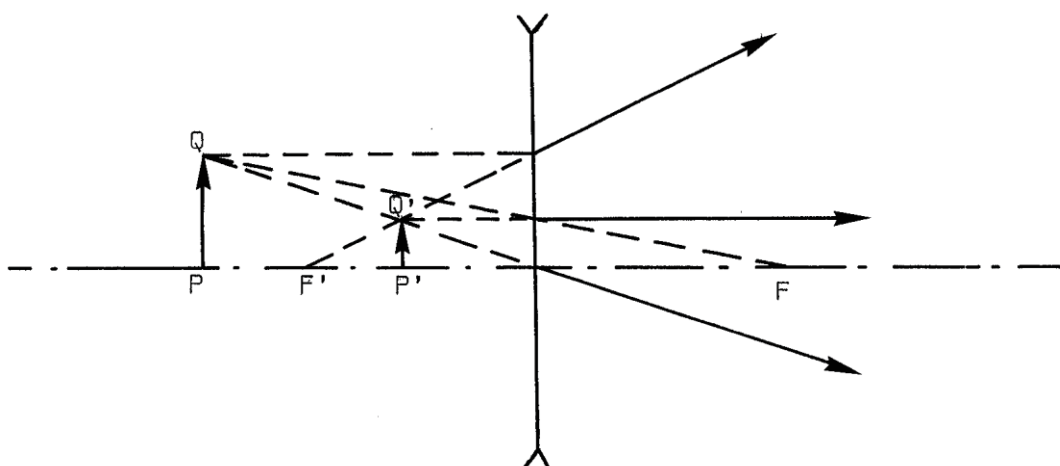
De betrekking (5.44) is algemeen geldig voor lenzen indien het teken van  $f$  genomen wordt volgens de overeengekomen tekenconventie.

- In het geval  $v < f$  en voor een convergerende lens, bekomen we een virtueel en rechtopstaand beeld (Fig. V.19). Het beeld ligt aan dezelfde kant als het voorwerp zodat wegens de tekenconventie  $b$  negatief zal zijn. De vergroting wordt gegeven door de verhouding  $m = -b/v$  zodat in dit geval  $m$  positief zal zijn en we dus een rechtopstaand beeld moeten bekomen.

- In het geval  $v > f$  voor een convergerend systeem, bekomen we een reëel en omgekeerd beeld (Fig. V.18). Nu is  $b$  positief zodat  $m$  negatief wordt.
- In het geval dat  $v = f$  en voor een convergerend systeem zal het beeld op oneindig liggen.
- In het geval van een divergerend systeem moet  $f$  negatief gerekend worden. Voor  $v > |f|$  bekomen we dan een rechtopstaand, virtueel, verkleind beeld (Fig.V.20). In het geval dat  $v < |f|$  bekomen we ook een virtueel, rechtopstaand en verkleind beeld (Fig. V.21).



Figuur V. 20 ( $v > 0, b < 0, f > 0, m > 0$ )



Figuur V. 19 ( $v > 0, b < 0, f < 0, m > 0$ )