Hoofdstuk 2

Algebraïsche Grafentheorie

2.1 Inleiding

In dit hoofdstuk staat de adjacentiematrix van een graaf centraal. We gaan nader bestuderen welke eigenschappen van deze matrix iets vertellen over de graaf. We beginnen met op te merken dat "de adjacentiematrix" eigenlijk niet uniek bepaald is, maar slechts op een permutatie van de rijen en kolommen na (dezelfde permutatie van de rijen als van de kolommen). Dit brengt met zich mee dat we enkel geïnteresseerd zullen zijn in die eigenschappen van de adjacentiematrix die invariant zijn onder zulke permutaties. Eén zulke eigenschap is de karakteristieke vergelijking en het bijbehorende spectrum. Verwant daarmee is de dimensie van de reële algebra voortgebracht door de adjacentiematrix. De resultaten die we zullen bespreken zijn vooral van theoretisch belang. Ze vinden vele toepassingen binnen de wiskunde zelf.

We maken nog de volgende afspraak in verband met notatie. Voor een reële $n \times n$ matrix M, en een vector u uit $\mathbb{R}^n$ noteren we door Mu het beeld van u door de lineaire transformatie bepaald door M; deze lineaire transformatie wordt op zijn beurt gedefinieerd door te stellen dat de $i$de kolom, gezien als element van $\mathbb{R}^n$, het beeld is van de $i$de standaard basisvector. Door deze definitie is het perfect mogelijk dat we vooraf u definieerden als een reëel n-tal, terwijl in de klassieke notatie u een kolommatrix zou moeten zijn.

2.2 Spectrum en adjacentie-algebra van een graaf

Zij $\Gamma = (V, E)$ een graaf met $n \geq 1$ toppen. We stellen $V = \{v_i : i = 1, 2, \dots, n\}$.

Definitie 2.2.1. Een **adjacentiematrix** $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ van Γ is als volgt bepaald: $a_{ij} = 0$ als de toppen v_i en v_j niet adjacent zijn, en $a_{ij} = 1$ als ze wel adjacent zijn, terwijl we voor alle i hebben dat $a_{ii} = 0$.

We noteren door $\mathbf{I}$ de $n \times n$ eenheidsmatrix en door $\mathbf{O}$ de $n \times n$ nulmatrix.

Definitie 2.2.2. De **karakteristieke veelterm** van een graaf Γ met adjacentiematrix A in de onbepaalde λ is de veelterm $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

Een **permutatiematrix** is een vierkante matrix waarvan alle elementen 0 en 1 zijn die de eigenschap heeft dat er precies één 1 voorkomt in elke kolom en rij.

Stelling 2.2.3. *Twee adjacentiematrices A_1 en A_2 van Γ zijn elkaars toegevoegde door middel van een permutatiematrix.*

Bewijs. Stel de toppenverzameling V van Γ gelijk aan $\{v_i : i = 1, 2, \ldots, n\} = \{w_j : j = 1, 2, \ldots, n\}$ zodat voor alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ geldt dat $(A_1)_{ij} = 1$ als en slechts als $v_i \sim v_j$ and $(A_2)_{ij} = 1$ als en slechts als $w_i \sim w_j$. Zij σ de permutatie van $\{1, 2, \ldots, n\}$ zodat $v_i = w_{i^\sigma}$ voor elke $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dan geldt $(A_1)_{ij} = (A_2)_{i^\sigma j^\sigma}$ voor alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definieer dan een $n \times n$ permutatiematrix P als volgt: $P_{ij} = 1$ als en slechts als $j = i^\sigma$ ($i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Voor alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ geldt dat $(PP^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} P_{ik} P_{jk} = \delta_{ij}$, zodat $PP^T = \mathbf{I}$ en P inverteerbaar is met inverse P^T.

Stel nu $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dan geldt:

$$(PA_2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} P_{ik}(A_2)_{kj} = (A_2)_{i^\sigma j} = (A_1)_{ij^{\sigma^{-1}}},$$

$$(A_1P)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A_1)_{ik} P_{kj} = (A_1)_{ij^{\sigma^{-1}}}.$$

Bijgevolg, $PA_2 = A_1P$ and $A_2 = P^{-1}A_1P$. □

Daar twee willekeurige adjacentiematrices elkaars toegevoegde zijn door middel van een permutatiematrix, zal de karakteristieke veelterm onafhankelijk zijn van de gekozen adjacentiematrix (zie de cursus "Lineaire Algebra en Meetkunde I").

Definitie 2.2.4. De (complexe) nulpunten van de karakteristieke veelterm van een graaf Γ met adjacentiematrix $\mathbf{A}$ noemen we de **eigenwaarden** van $\mathbf{A}$, en ook van Γ. De **multipliciteit** van een eigenwaarde is de algebraïsche multipliciteit als nulpunt van de karakteristieke veelterm. Een **eigenvector behorende bij een reële eigenwaarde** λ is een niet-nul vector v in de reële n-dimensionale vectorruimte $\mathbb{R}^n$ waarvoor $\mathbf{A}v = \lambda v$ (en hangt dus wel af van de gekozen adjacentiematrix $\mathbf{A}$). De **eigenruimte behorende bij** λ is de verzameling van eigenvectoren behorende bij λ tesamen met de nul-vector.

We merken nu op dat $\mathbf{A}$ een reële symmetrische matrix is, en dus hebben we de volgende eigenschappen (voor de bewijzen, zie de cursus "Lineaire Algebra en Meetkunde I").

Stelling 2.2.5. *Alle eigenwaarden van $\mathbf{A}$ zijn reëel. De multipliciteit van elke eigenwaarde is de dimensie van de bijbehorende eigenruimte. De eigenvectoren behorende bij verschillende eigenwaarden staan loodrecht op elkaar in $\mathbb{R}^n$. Bijgevolg kan een orthonormale basis van $\mathbb{R}^n$ worden gevonden bestaande uit uitsluitend eigenvectoren van $\mathbf{A}$.*

Deze stelling heeft reeds een eerste interessant gevolg. Maar eerst nog een definitie (ook gezien in “Lineaire Algebra en Meekunde I”, maar voor de volledigheid herhalen we het).

Definitie 2.2.6. Er is een unieke monische veelterm $m(x) \in \mathbb{R}[x]$ waarvoor geldt dat $m(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ en die een deler is van elke andere reële veelterm $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ waarvoor $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. De veelterm $m(x)$ wordt de **minimaalveelterm** (in de onbepaalde x) van $\mathbf{A}$ genoemd.

Daar $\mathbf{A}$ een reële symmetrische matrix is, weten we uit de cursus “Lineaire Algebra en Meetkunde I” dat $m(x)$ verkregen wordt door het vermenigvuldigen van alle eerstegraadsveeltermen $x - \lambda$, waarbij λ de verzameling eigenwaarden van Γ doorloopt.

Definitie 2.2.7. Als de graad van de minimaalveelterm gelijk is aan s, dan kunnen we een $2 \times s$ matrix $\mathbf{S}$ definiëren waarbij de eerste rij de verschillende eigenwaarden in dalende volgorde bevat, en waarbij in de tweede rij de bijhorende multipliciteiten staan. De matrix $\mathbf{S}$ wordt het **spectrum** van $\mathbf{A}$ of van Γ genoemd.

Bereken zelf als oefening het spectrum van enkele grafen op vier toppen. Om de karakteristieke veelterm op te stellen hoef je alleen de determinant van $\mathbf{A}$ te berekenen, want alle andere coëfficiënten kunnen worden afgeleid uit het volgende resultaat.

Stelling 2.2.8. *Onderstel dat de karakteristieke veelterm van de graaf Γ met minstens drie toppen gelijk is aan*

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + c_3\lambda^{n-3} + \cdots + c_n.$$

Dan is $c_1 = 0$, $c_2 \leq 0$ en $-c_2$ is het aantal bogen van Γ; $c_3 \leq 0$, c_3 is even en $-c_3/2$ is gelijk aan het aantal driehoeken in Γ; $(-1)^n c_n$ is gelijk aan de determinant van $\mathbf{A}$.

Bewijs. De coëfficiënt van λ^{n-1} is precies gelijk aan het tegengestelde van de som van de diagonaalelementen van $\mathbf{A}$; daar elk diagonaalelement gelijk is aan 0, volgt gemakkelijk dat $c_1 = 0$.

De coëfficiënt van λ^{n-2} is de som van de determinanten van de 2×2 deelmatrices

$$\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{pmatrix},$$

waarbij $1 \leq i < j \leq n$. Deze matrix is de nulmatrix als $a_{ij} = 0$, dus als v_i en v_j geen boog vormen, terwijl de determinant -1 is precies als $\{v_i, v_j\} \in E(\Gamma)$. We besluiten dat c_2 gelijk is aan min het aantal bogen van Γ.

De coëfficiënt van λ^{n-3} is gelijk aan het tegengestelde van de som van de determinanten van de matrices

$$\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ij} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ik} & a_{jk} & a_{kk} \end{pmatrix},$$

waarbij $1 \leq i < j < k \leq n$. Je kan gemakkelijk zelf nagaan dat deze determinant nul is van zodra één van de paren $\{v_i, v_j\}$, $\{v_i, v_k\}$ of $\{v_j, v_k\}$ geen boog is. Zijn ze alle drie wel bogen, dan is de determinant gelijk aan 2. Dit gebeurt dus precies als de toppen v_i, v_j, v_k een driehoek vormen in Γ. We besluiten dat $-c_3/2$ gelijk is aan het aantal driehoeken van Γ en dat c_3 even is.

De onafhankelijke coëfficiënt c_n wordt bekomen door in $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ de veranderlijke λ gelijk aan nul te stellen; dus $c_n = \det(-\mathbf{A}) = (-1)^n \det \mathbf{A}$. □

Definitie 2.2.9. De **adjacentie-algebra** $\mathcal{A}$ van Γ, wordt als volgt gedefinieerd. Eerst en vooral is het een deelruimte van de reële vectorruimte van alle reële $n \times n$ matrices, waarin het per definitie wordt voortgebracht door $\mathbf{I}$ en alle natuurlijke machten van $\mathbf{A}$. Met andere woorden, $\mathcal{A}$ bestaat uit alle $g(\mathbf{A})$, met $g(x)$ een reële veelterm.

Merk op dat deze definitie afhankelijk is van de gekozen adjacentiematrix, maar elke andere keuze geeft op een permutatie van de kolommen en rijen na dezelfde deelruimte. Waarom wordt deze deelruimte nu een *algebra* genoemd (meer specifiek een $\mathbb{R}$-*algebra*, zie ook "Lineaire Algebra en Meetkunde I")? Algemeen is een algebra een vectorruimte waarbij er nog eens een product tussen de vectoren gedefinieerd is (met waardeverzameling de verzameling der vectoren), compatibel met de scalaire vermenigvuldiging en de optelling van vectoren. Met compatibel wordt hier bedoeld dat de vermenigvuldiging distributief ten opzichte van de optelling en associeert met de scalaire vermenigvuldiging.

De vectorruimte der $n \times n$ matrices over een willekeurig veld is een algebra, voor de gewone vermenigvuldiging van matrices. In het algemeen wordt niet geëist dat dit product associatief is, maar voor matrices is dit "per ongeluk" wel het geval. In ons geval is $\mathcal{A}$ een algebra omdat het product van twee veeltermen in $\mathbf{A}$ terug een veelterm is in $\mathbf{A}$. Deze algebra is associatief omdat de vermenigvuldiging van matrices associatief is. Het is ook een commutatieve algebra omdat twee willekeurige machten van $\mathbf{A}$ commuteren met elkaar, en dus ook twee willekeurige veeltermen in $\mathcal{A}$.

Definitie 2.2.10. De **dimensie** van de algebra $\mathcal{A}$ is per definitie de dimensie van $\mathcal{A}$ als reële vectorruimte.

We kunnen deze als volgt bepalen.

Stelling 2.2.11. *De dimensie van $\mathcal{A}$ is precies gelijk aan de graad s van de minimaalveelterm van Γ en $\mathcal{A}$ wordt voortgebracht door de matrices $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{s-1}$.*

Bewijs. We bewijzen dat $\mathcal{B} = \{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{s-1}\}$ een basis is van $\mathcal{A}$. Geen enkel element uit deze verzameling is te schrijven als een lineaire combinatie van de andere elementen omdat dit anders zou leiden tot $g(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, met $g(x)$ een niet-nul veelterm van graad ten hoogste $s - 1$ die niet deelbaar kan zijn door de minimaalveelterm. Er rest ons dus nog te bewijzen dat alle elementen van $\mathcal{A}$ kunnen geschreven worden als een lineaire combinatie van elementen uit $\mathcal{B}$. Het is duidelijk dat we dit alleen moeten bewijzen voor positieve machten $\mathbf{A}^\ell$ van $\mathbf{A}$. We doen dit door inductie op ℓ. Voor $\ell = 0, 1, \ldots, s-1$ is dit triviaal, dus onderstel $\ell \geq s$. We schrijven $\mathbf{A}^\ell = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\ell-1}$. Door inductie is $\mathbf{A}^{\ell-1}$ te schrijven als een lineaire combinatie van elementen uit $\mathcal{B}$, en dus is $\mathbf{A}^\ell$ te schrijven als lineaire combinatie van elementen uit $\mathcal{B}$ aangevuld met de matrix $\mathbf{A}^s$. Het volstaat dus te bewijzen dat $\mathbf{A}^s$ kan geschreven worden als lineaire combinatie van elementen uit $\mathcal{B}$. Maar dit volgt nu uit $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, waarbij $f(x)$ de minimaalveelterm (van graad s) van A is. $\square$

De volgende stelling toont aan dat de matrices A^i, $i \in \mathbb{N}$, combinatorische informatie bevatten.

Stelling 2.2.12. *Zij i een willekeurig natuurlijk getal. Het element $a_{jk}^{(i)}$ van $\mathbf{A}^i$ in de positie (j,k) is precies gelijk aan het aantal wandelingen van lengte i tussen v_j en v_k.*

Bewijs. We bewijzen dit door middel van inductie op i. Voor $i = 0$ en voor $i = 1$ is dit duidelijk. Zij nu $i > 1$. Met bovenstaande notatie hebben we dan

$$a_{jk}^{(i)} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{j\ell}^{(i-1)} a_{\ell k}.$$

Nu is $a_{j\ell}^{(i-1)} a_{\ell k} \neq 0$ als en slechts als er een wandeling van lengte $i-1$ van v_j naar v_ℓ bestaat, en er een boog is tussen v_ℓ en v_k. In dit geval is $a_{j\ell}^{(i-1)} a_{\ell k}$ gelijk aan het aantal wandelingen van lengte i van v_j naar v_k die als voorlaatste element v_ℓ hebben. Daar elke wandeling van lengte i als voorlaatste element een zekere v_ℓ adjacent aan v_k heeft, zal het totaal aantal wandelingen van lengte i de som zijn van $a_{j\ell}^{(i-1)}$ over alle ℓ waarvoor v_ℓ adjacent is aan v_k. Maar dat is precies gelijk aan $\sum_{\ell=1}^{n} a_{j\ell}^{(i-1)} a_{\ell k} = a_{jk}^{(i)}$ en de stelling is bewezen. $\square$

Hoewel voorgaande stelling op het eerste zicht vooral praktisch nut heeft, vermelden we nu drie interessante theoretische gevolgen.

Gevolg 2.2.13. *Zij s de dimensie van de adjacentie-algebra van een samenhangende graaf Γ, zij d de diameter van Γ en zij n het aantal toppen van Γ. Dan geldt dat $d < s \leq n$.*

Bewijs. Daar s de graad is van de minimaalveelterm van $\mathbf{A}$, en n de graad is van de karakteristieke veelterm van $\mathbf{A}$ is al zeker $s \leq n$ (en gelijkheid geldt als en slechts als alle eigenwaarden van $\mathbf{A}$ verschillend zijn, of dus multipliciteit 1 hebben). Uit stelling 2.2.11 leiden we af dat $\mathbf{A}^d$ een lineaire combinatie is van $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{s-1}$. Ware nu $s \leq d$, met v_i en v_j twee toppen op afstand d van elkaar, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dan zou $a_{ij}^{(\ell)} = 0$, voor alle $\ell \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$. Dus ook in elke lineaire combinatie van $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{s-1}$ zou het element in de positie (i,j) gelijk aan 0 zijn. In het bijzonder zou $a_{ij}^{(d)} = 0$, wat strijdig is met de definitie van d en stelling 2.2.12. $\square$

Gevolg 2.2.14. *De graaf Γ met $n \geq 2$ toppen is samenhangend als en slechts als $\mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^{n-2}$ geen enkel element gelijk aan 0 bevat.*

Bewijs. Vooreerst merken we op dat alle elementen van $\mathbf{A}^k$ positief of nul zijn, zodat het element in de positie (i, j) van $\mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^{n-2}$ niet gelijk is aan 0 als en slechts als het overeenkomstig element in één van de matrices $\mathbf{A}^{n-1}$, $\mathbf{A}^{n-2}$ niet nul is.

Als Γ samenhangend is, dan zijn elke twee toppen v_i, v_j op afstand $\leq n-1$ van elkaar gelegen. Is deze afstand precies $n-1$, dan is $a_{ij}^{(n-1)} \neq 0$ wegens stelling 2.2.12. Is deze afstand precies $n-2$, dan volgt analoog dat $a_{ij}^{(n-2)} \neq 0$. Is deze afstand gelijk aan $\ell < n-2$, dan beschouwen we een willekeurige top v_m adjacent met v_j (deze bestaat, anders is v_j geïsoleerd en Γ niet samenhangend) en wandelen we over en weer van v_j naar v_m en terug tot wanneer we een wandeling van lengte $n-2$ of $n-1$ gedaan hebben van v_i naar v_j. Stelling 2.2.12 garandeert ons dan dat minimaal 1 van de getallen $a_{ij}^{(n-1)}, a_{ij}^{(n-2)}$ verschillend is van 0. Aldus is geen enkel element van $\mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^{n-2}$ gelijk aan nul.

Is Γ niet samenhangend, en zit bijvoorbeeld v_i in een andere samenhangende component dan v_j, $1 \leq i, j \leq n$, dan volgt uit stelling 2.2.12 dat $a_{ij}^{(\ell)} = 0$ voor alle natuurlijke getallen ℓ, en zal dus ook het element in de positie (i, j) van $\mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^{n-2}$ gelijk aan 0 zijn. □

Gevolg 2.2.15. *Zij $i \in \mathbb{N}$ en Γ een graaf met adjacentiematrix $\mathbf{A}$. De som van de $i$de machten van alle eigenwaarden van $\mathbf{A}$ is gelijk aan de som van de eigenwaarden van $\mathbf{A}^i$ (hun multipliciteiten in rekening gebracht). Deze som is op zijn beurt gelijk is aan het totaal aantal gesloten wandelingen van lengte i in Γ.*

Bewijs. Zij B een basis van eigenvectoren van $\mathbf{A}$. Als $v \in B$ en $\mathbf{A}v = \lambda v$, dan geldt $\mathbf{A}^i v = \lambda^i v$. B is dus een basis van eigenvectoren voor zowel $\mathbf{A}$ als $\mathbf{A}^i$, en als λ de eigenwaarde van $\mathbf{A}$ is horend bij de eigenvector $v \in B$, dan is λ^i de eigenwaarde van $\mathbf{A}^i$ die hoort bij v. Dit bewijst de eerste bewering.

De tweede bewering volgt uit stelling 2.2.12 en het feit dat het spoor van een vierkante matrix gelijk is aan de som van zijn eigenwaarden. □

2.3 Eigenwaarden van een niet-samenhangende graaf

Als een graaf Γ niet-samenhangend is, dan volstaat het de eigenwaarden en bijbehorende multipliciteiten te kennen van alle samenhangende componenten om het spectrum van Γ volledig te kennen. Dit volgt door eenvoudige inductie uit het nu volgend lemma.

Lemma 2.3.1. *Zij Γ een niet-samenhangende graaf en zij Γ_1 en Γ_2 twee top-disjuncte niet-lege deelgrafen van Γ die als unie Γ hebben (en die zelf mogelijks de unie zijn van samenhangende componenten van Γ). Dan is de verzameling eigenwaarden van Γ de unie van de verzamelingen eigenwaarden van Γ_1 en van Γ_2. De multipliciteit van een eigenwaarde λ van Γ is de som van de multipliciteiten van λ als eigenwaarde van Γ_1 en van Γ_2 (met de afspraak dat de multipliciteit 0 is voor elk getal dat geen eigenwaarde is).*

Bewijs. Dit volgt onmiddellijk uit het feit dat we de adjacentiematrix $\mathbf{A}$ van Γ kunnen schrijven als $\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}$, waarbij $\mathbf{A}_i$ een adjacentiematrix is van Γ_i, $i = 1, 2$, en waarbij $\mathbf{O}$ telkens staat voor een 0-matrix van gepaste dimensies. $\square$

2.4 Regulariteit en bipartitie

De volgende stelling geeft een grens op de grootte van de absolute waarde van eigenwaarden. Voor de extreme waarden worden, in het samenhangend geval, precies de reguliere grafen en de reguliere bipartiete grafen algebraïsch gekarakteriseerd.

Stelling 2.4.1. *Zij Γ een niet-lege graaf met adjacentiematrix $\mathbf{A}$. Dan geldt:*

(i) *Is Γ regulier, dan is zijn graad $\Delta(\Gamma)$ een eigenwaarde waarvoor $(1, 1, \ldots, 1)$ een bijhorende eigenvector is. Is Γ regulier en bipartiet met bipartitie (V_1, V_2), dan is $-\Delta(\Gamma)$ een eigenwaarde waarvoor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ een eigenvector is waarbij $a_i = 1$ als $v_i \in V_1$ en $a_i = -1$ als $v_i \in V_2$.*

(ii) $|\lambda| \leq \Delta(\Gamma)$ *voor elke eigenwaarde λ van A.*

(iii) *Is Γ samenhangend en is $\lambda = \Delta(\Gamma)$ een eigenwaarde, dan is Γ regulier en de multipliciteit van λ is gelijk aan 1.*

(iv) *Is Γ samenhangend en is $\lambda = -\Delta(\Gamma)$ een eigenwaarde, dan is Γ regulier en bipartiet. Bovendien is de multipliciteit van λ opnieuw gelijk aan 1.*

(v) *Is Γ regulier, dan is de multipliciteit van de eigenwaarde $\Delta(\Gamma)$ gelijk aan $k(\Gamma)$. Is Γ regulier en bipartiet, dan is de multipliciteit van de eigenwaarde $-\Delta(\Gamma)$ gelijk aan $k(\Gamma)$.*

Bewijs. Eigenschap (i) volgt uit het feit dat in elke rij van $\mathbf{A}$ precies $\Delta(\Gamma)$ keer het getal 1 voorkomt. Eigenschap (v) volgt uit eigenschappen (i), (iii), (iv) en lemma 2.3.1. Uit lemma 2.3.1 weten we ook dat eigenschap (ii) geldt van zodra deze geldt voor samenhangende grafen Γ. Om eigenschappen (ii), (iii) en (iv) aan te tonen, mogen we dus onderstellen dat Γ samenhangend is.

Stel $\Delta(\Gamma) = k$ en onderstel dat $\lambda \geq k$ een eigenwaarde is van $\mathbf{A}$. Zij $w = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ een eigenvector behorende bij de eigenwaarde λ. We nemen een index $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zodat $|a_i| \geq |a_j|$ voor alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Zij g de graad van v_i. Door eventueel w te vervangen door $-w$ mogen we aannemen dat $a_i > 0$. De i-de coördinaat van $\mathbf{A}w$ is gelijk aan de som van de g getallen a_j waarvoor v_j adjacent is aan v_i. Daar λ een eigenwaarde is, krijgen we dus

$$0 = \lambda a_i - \sum_{v_j \sim v_i} a_j \geq \lambda a_i - \sum_{v_j \sim v_i} |a_j| \geq \lambda a_i - g a_i \geq 0,$$

waaruit volgt dat elke term in die serie ongelijkheden 0 moet zijn, en dus elke ongelijkheid wordt een gelijkheid. In het bijzonder is $\lambda = g$ en $a_i = a_j$ voor elke j waarvoor $v_j \sim v_i$. Merk op dat nu ook $\lambda = k$, want $g = \lambda \geq k \geq g$. We kunnen nu hetzelfde spelletje doen met elke v_j adjacent met v_i, daar ook de bijhorende $|a_j| \geq |a_m|$ voor alle $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Zo verdergaand zien we dat alle a_j moeten gelijk zijn aan elkaar, voor $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, en elke top v_j heeft graad k. We besluiten dat Γ regulier is. Bovendien hebben we voor de willekeurige eigenvector w bewezen dat alle coördinaten gelijk zijn, met andere woorden, de eigenruimte behorende bij $\Delta(\Gamma)$ wordt voortgebracht door de vector $(1, 1, \ldots, 1)$. We hebben dus (iii) volledig bewezen en (ii) voor positieve eigenwaarden λ.

Onderstel nu dat $\lambda \leq -k$ een eigenwaarde is van $\mathbf{A}$. We nemen terug een willekeurige eigenvector $w = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ behorende bij de eigenwaarde λ. Neem opnieuw een index $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zodat $|a_i| \geq |a_j|$ voor alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ en zij g de graad van v_i. Door eventueel w te vervangen door $-w$ mogen we aannemen dat $a_i < 0$. Analoog als hierboven verkrijgen we

$$0 = \lambda a_i - \sum_{v_j \sim v_i} a_j \geq \lambda a_i - \sum_{v_j \sim v_i} |a_j| \geq \lambda a_i - g|a_i| \geq (-\lambda - g)|a_i| \geq (k - g)|a_i| \geq 0,$$

waaruit we analoog als hierboven afleiden dat $\lambda = -g = -k$ en $a_j = -a_i$ voor elke j waarvoor $v_j \sim v_i$. We kunnen nu hetzelfde spelletje doen met elke v_j adjacent met v_i, daar ook de bijhorende $|a_j| \geq |a_m|$ voor alle $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Zo verdergaand zien we dat, ten eerste, alle toppen graad k hebben, ten tweede, $|a_i| = |a_j|$ voor alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ en bijgevolg is geen enkele coördinaat van w nul, en, ten derde, de toppen van Γ in twee verzamelingen uiteenvallen: één die de v_j bevat waarvoor $a_j < 0$ en één die de v_j bevat waarvoor $a_j > 0$. Geen enkele top uit de éne verzameling is adjacent met een top uit dezelfde verzameling omdat adjacente toppen overeenkomen met tegengestelde coördinaten wegens bovenstaande redenering. We krijgen dus een bipartitie en Γ is bipartiet. Bovendien is Γ ook k-regulier. Analoog aan de eerste paragraaf zien we ook in dat de multipliciteit van $-\Delta(\Gamma)$ gelijk is aan 1. We hebben dus (iv) volledig bewezen en (ii) voor negatieve eigenwaarden λ. $\square$

Puntje (i) van de volgende stelling werd reeds bewezen in voorgaande stelling. In (ii) karakteriseren we de regulariteit van een graaf door middel van de adjacentie-algebra $\mathcal{A}$. We noteren met $\mathbf{J}$ de $n \times n$ matrix waarvan elk element gelijk is aan 1.

Stelling 2.4.2. *Zij Γ een niet-lege graaf met adjacentiematrix $\mathbf{A}$, en stel $k = \Delta(\Gamma)$. Dan gelden de volgende uitspraken.*

(i) *Is Γ samenhangend, dan is Γ regulier* **als en slechts als** *k een eigenwaarde van Γ is (en in dit geval is de multipliciteit van k gelijk aan 1).*

(ii) *Γ is samenhangend en regulier* **als en slechts als** $\mathbf{J} \in \mathcal{A}$.

Bewijs. We bewijzen (ii).

We onderstellen eerst dat Γ regulier en samenhangend is. Zij $u = (1, 1, \ldots, 1)$, dan weten we dat $\mathbf{A}u = ku$. Als we deze gelijkheid n keren naast elkaar schrijven, komt er $\mathbf{AJ} = k\mathbf{J}$. Nu weten we dat k als eigenwaarde multipliciteit 1 heeft, dus elke eigenvector behorende bij k is een veelvoud van u. Daaruit leiden we af dat, zodra een matrix $\mathbf{B}$ voldoet aan $\mathbf{AB} = k\mathbf{B}$, dan elke kolom van B een veelvoud van u is. Is bovendien $\mathbf{B}$ symmetrisch, dan is ook elke rij een veelvoud van u, en kan $\mathbf{B}$ niets anders meer zijn dan een veelvoud van $\mathbf{J}$. Zij nu $f(x)$ het minimaalpolynoom van $\mathbf{A}$. Daar k een wortel is met multipliciteit 1, kunnen we $f(\mathbf{A})$ schrijven als $(\mathbf{A} - k\mathbf{I})g(\mathbf{A})$, met $g(\mathbf{A}) \neq \mathbf{O}$. Bijgevolg is $\mathbf{A}g(\mathbf{A}) = kg(\mathbf{A})$ en we besluiten dat de matrix $g(\mathbf{A})$ een veelvoud is van $\mathbf{J}$. Per definitie is nu $g(\mathbf{A}) \in \mathcal{A}$ en dus behoort $\mathbf{J}$ tot $\mathcal{A}$.

Onderstel nu omgekeerd dat J tot $\mathcal{A}$ behoort. Daar $\mathcal{A}$ een commutatieve algebra is, zal $\mathbf{AJ} = \mathbf{JA}$. Het element in de positie (i, j) van het linkerlid is de graad van v_i; het element in dezelfde positie van het rechterlid is de graad van v_j. We besluiten dat Γ regulier is. Onderstel nu dat Γ niet samenhangend zou zijn. Dan zijn er toppen v_i en v_j die niet kunnen verbonden worden door een wandeling. Dus wegens stelling 2.2.12 is het element op de positie (i, j) van elke macht van $\mathbf{A}$ gelijk aan nul. Daar $\mathbf{J}$ een lineaire combinatie is van zulke matrices, bekomen we een strijdigheid. $\square$

In feite kan men bewijzen dat voor een willekeurige graaf geldt: Γ *is regulier als en slechts als* $\Delta(\Gamma)$ *een eigenwaarde is van* Γ *met multipliciteit* $\geq k(\Gamma)$ *(en in dat geval is de multipliciteit precies gelijk aan* $k(\Gamma)$*)*. Je kan dit proberen bewijzen als oefening. Lemma 2.3.1 kan nuttig zijn in dit verband.

We onderzoeken nu grafen met slechts één of twee verschillende eigenwaarden.

Stelling 2.4.3. *Elke niet-ledige graaf zonder bogen heeft slechts* 1 *eigenwaarde (namelijk* 0*), en elke graaf* Γ *die de disjuncte unie is van een aantal complete grafen van gelijke grootte* $m \geq 2$ *heeft juist* 2 *eigenwaarden (namelijk de graad* $m - 1$ *met multipliciteit het aantal componenten* $k(\Gamma)$ *van* Γ*, en* -1 *met multipliciteit* $n - k(\Gamma)$ *waarbij* n *het totaal aantal toppen is). Omgekeerd moet elke niet-lege graaf die ten hoogste twee eigenwaarden heeft één van deze grafen zijn.*

Bewijs. Onderstel dat Γ een complete graaf is met n toppen. De adjacentiematrix $\mathbf{A}$ van Γ is dan gelijk aan $\mathbf{J} - \mathbf{I}$. Beschouw nu de matrix $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$. Als we in deze matrix bij de eerste kolom alle overige kolommen optellen, vervolgens elk element $\lambda - (n - 1)$ in de nieuwe eerste kolom vervangen door 1, en tenslotte de nieuwe eerste kolom bij alle overige kolommen optellen, dan krijgen we een benedendriehoeksmatrix met elementen $1, \lambda + 1, \lambda + 1, \ldots, \lambda + 1$ op de diagonaal. Bijgevolg is $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - (n-1))(\lambda + 1)^{n-1}$, zodat Γ eigenwaarde $n - 1$ heeft (met multipliciteit 1) en -1 (met multipliciteit $n - 1$).

Gebruik makend van lemma 2.3.1 kunnen we nu inzien dat de eigenwaarden van elke graaf Γ op n toppen die de disjuncte unie is van complete grafen met dezelfde grootte gelijk zijn aan de graad (met multipliciteit het aantal componenten $k(\Gamma)$ van Γ) en -1

(met multipliciteit $n - k(\Gamma)$). In het bijzonder heeft elke niet-lege graaf zonder bogen slechts 1 eigenwaarde, namelijk 0.

Omgekeerd, onderstel dat Γ een graaf is waarvan het aantal eigenwaarden ten hoogste 2 is. Dan volgt uit lemma 2.3.1 en gevolg 2.2.13 dat elke samenhangende component diameter tenhoogste 1 heeft en bijgevolg een complete deelgraaf is. Daar er ten hoogste twee eigenwaarden zijn, moet elke samenhangende component bovendien dezelfde grootte hebben. □

Het complement van een reguliere graaf is regulier. Men kan zich afvragen of we op voorhand kunnen weten of dit een samenhangende graaf zal zijn. Het blijkt dat we dit gemakkelijk kunnen testen door naar het spectrum van Γ te kijken.

Stelling 2.4.4. *Zij Γ een samenhangende k-reguliere graaf op $n \geq 1$ toppen. Dan is het complement van Γ samenhangend als en slechts als $k - n$ geen eigenwaarde van Γ is.*

Bewijs. We zien gemakkelijk in dat $\mathbf{B} := \mathbf{J} - \mathbf{I} - \mathbf{A}$ een adjacentiematrix is van het complement $\overline{\Gamma}$ van Γ.

Stel nu eerst dat $k - n$ een eigenwaarde is van Γ. Daar $k - n \neq k$, kunnen we een eigenvector z kiezen behorende bij $k - n$ die lineair onafhankelijk is van de vector $u = (1, 1, \ldots, 1)$. We berekenen $\mathbf{B}z = \mathbf{J}z - \mathbf{I}z - \mathbf{A}z = -z - (k - n)z = (n - k - 1)z$ (rekening houdend met het feit dat z loodrecht op u staat, zie Stelling 2.2.5). Daar $\overline{\Gamma}$ $(n - k - 1)$-regulier is, zien we dat $n - k - 1$ een eigenwaarde is met multipliciteit ≥ 2 (want ook u is een eigenvector behorende bij $n - k - 1$). Aldus kan $\overline{\Gamma}$ niet samenhangend zijn.

Onderstel nu dat $\overline{\Gamma}$ niet samenhangend is. Dan is de multipliciteit van de eigenwaarde $n - k - 1$ strikt groter dan 1 en kunnen we een eigenvector z van $\mathbf{B}$ kiezen loodrecht op u en behorende bij de eigenwaarde $n - k - 1$. We hebben $\mathbf{A}z = \mathbf{J}z - \mathbf{I}z - \mathbf{B}z = (k - n)z$. Dus $k - n$ is een eigenwaarde van $\mathbf{A}$. □

Tenslotte geven we nog een karakterisering van bipartiete grafen die niet noodzakelijk regulier zijn.

Stelling 2.4.5. *Een niet-lege graaf Γ is bipartiet als en slechts als de karakteristieke veelterm ofwel een even ofwel een oneven functie is (naargelang n even of oneven is).*

Bewijs. Onderstel eerst dat Γ bipartiet is. Als we kunnen bewijzen dat als λ een eigenwaarde van Γ is met multipliciteit m, dat dan ook $-\lambda$ een eigenwaarde is met dezelfde multipliciteit m, dan is de karakteristieke veelterm $f(x)$ een product van een macht van x (dit komt overeen met een eventuele eigenwaarde 0) met factoren van de vorm $(x - \lambda)^m(x + \lambda)^m = (x^2 - \lambda^2)^m$, en is de stelling bewezen.

Noem $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n_1}\}$ en $V_2 = \{v_{n_1+1}, v_{n_1+2}, \ldots, v_{n_1+n_2}\}$ de twee bipartitieverzamelingen van Γ. Ten opzichte van de ordening $v_1, v_2, \ldots, v_{n_1+n_2}$ zal de adjacentiematrix (in blokvorm) de gedaante $\begin{bmatrix} O & B \\ B^T & O \end{bmatrix}$ hebben, waarbij B een $n_1 \times n_2$ matrix is. Uit[1]

$$\begin{bmatrix} O & B \\ B^T & O \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow By = \lambda x \text{ en } B^T x = \lambda y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} O & B \\ B^T & O \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = -\lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

volgt dat het lineair automorfisme van $\mathbb{R}^n$ gedefinieerd door

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_1+n_2}) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, -x_{n_1+1}, \ldots, -x_{n_1+n_2})$$

de eigenruimte horend bij λ afbeeldt op de eigenruimte horend by $-\lambda$. Bijgevolg hebben beide eigenwaarden dezelfde multipliciteit.

We bewijzen nu het omgekeerde. Onderstel dus dat de karakteristieke veelterm ofwel een even ofwel een oneven functie is, naargelang n even of oneven is. Wegens stelling 1.7.4 volstaat het aan te tonen dat er geen cykels van oneven lengte zijn. Wegens stelling 2.2.12 is het voldoende om aan te tonen dat het spoor van elke oneven macht $\mathbf{A}^i$ van de adjacentiematrix $\mathbf{A}$ nul is. Wegens gevolg 2.2.15 is het daarvoor voldoende om aan te tonen dat de som van de $i$de machten van de eigenwaarden van $\mathbf{A}$ nul is, voor oneven i. Maar dit is natuurlijk zo, want de eigenwaarden van $\mathbf{A}$ liggen symmetrisch rond de 0, waaruit volgt dat dit ook het geval is voor de $i$de machten daarvan, met i oneven. □

We beogen nu een uitbreiding van stelling 2.2.8. Het volgende lemma zal daarvoor van nut zijn.

Lemma 2.4.6. *De determinant van een adjacentiematrix van een cykel van oneven lengte is gelijk aan* 2.

Bewijs. Noem $n = 2k+1$ de lengte van de cykel. Zij $\omega_j := \cos\frac{2\pi j}{2k+1} + i\sin\frac{2\pi j}{2k+1}$, met $j = 0, 1, \ldots, 2k$. Dan geldt $X^{2k+1} - 1 = \prod_{j=0}^{2k}(X - \omega_j)$. Stellen we hierin $X = 0$ en $X = -1$, dan vinden we respectievelijk $\prod_{j=0}^{2k}\omega_j = 1$ en $\prod_{j=0}^{2k}(1+\omega_j) = 2$. Daar ω_j een $(2k+1)$-de éénheidswortel is, is dit eveneens het geval voor ω_j^2, en bovendien is $\omega_{j_1}^2 \neq \omega_{j_2}^2$ als $\omega_{j_1} \neq \omega_{j_2}$ (anders zou $\omega_{j_1} = -\omega_{j_2}$ en $(-1)^{2k+1} = 1$, wat niet kan). Bijgevolg geldt eveneens $\prod_{j=0}^{2k}(1+\omega_j^2) = 2$.

De adjacentiematrix $\mathbf{A}$ van de cykel is een circulante matrix van de vorm

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{2k+1} \\ a_{2k+1} & a_1 & a_2 & \cdots & a_{2k} \\ a_{2k} & a_{2k+1} & a_1 & \cdots & a_{2k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

[1] Hierin zijn x en y kolommen die respectievelijk n_1 en n_2 elementen bevatten.

met $a_2 = a_{2k+1} = 1$ en $a_i = 0$ voor alle $i \in \{1, 2, \dots, 2k+1\} \setminus \{2, 2k+1\}$. Voor zo'n matrix is elke $v_j = (1, \omega_j, \omega_j^2, \dots, \omega_j^{2k})$ met $j \in \{0, 1, \dots, 2k\}$ een eigenvector met eigenwaarde $a_1 + a_2\omega_j + a_3\omega_j^2 + \cdots + a_{2k+1}\omega_j^{2k} = \omega_j + \omega_j^{2k} = \omega_j + \frac{1}{\omega_j} = \omega_j^{-1}(1 + \omega_j^2)$.

Daar de $2k+1$ vectoren v_j met $j \in \{0, 1, \dots, 2k\}$ een niet-singuliere $(2k+1) \times (2k+1)$ Vandermonde matrix bepalen en dus linear onafhankelijk zijn, worden de $2k+1$ eigenwaarden van $\mathbf{A}$ gegeven door $\omega_j^{-1}(1 + \omega_j^2)$, $j = 0, 1, \dots, 2k$. Bijgevolg geldt dat $\det(\mathbf{A}) = \prod_{j=0}^{2k} \omega_j^{-1}(1 + \omega_j^2) = 2$. □

Stelling 2.4.7. *Onderstel dat de karakteristieke veelterm van de graaf Γ met minstens drie toppen gelijk is aan*

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + c_3\lambda^{n-3} + \cdots + c_n.$$

Bestaat er een oneven getal ℓ met $c_\ell \neq 0$, zij dan het natuurlijke getal i minimaal met de eigenschap dat $c_{2i+1} \neq 0$. Er geldt dat c_{2i+1} even is, dat $-c_{2i+1}/2$ gelijk is aan het aantal cykels van lengte $2i+1$ in Γ, en dat Γ geen cykels van oneven lengte kleiner dan $2i+1$ bevat. Zijn alle c_ℓ gelijk aan nul, voor oneven ℓ, dan bevat Γ geen cykels van oneven lengte.

Bewijs. De laatste bewering volgt direct uit stelling 2.4.5. We moeten dus alleen de overige beweringen bewijzen.

We onderstellen dus dat i gedefinieerd is. Indien er geen cykel van oneven lengte kleiner dan $2i+1$ bestaat, dan stellen we $j = i$. Anders kiezen we $j < i$ zodat $2j+1$ de kleinste oneven lengte van een cykel is. In elke geval is er geen cykel van oneven lengte kleiner dan $2j+1$.

De coëfficiënt $(-1)^{2j+1}c_{2j+1} = -c_{2j+1}$ wordt bekomen door de som te maken van alle $(2j+1) \times (2j+1)$ hoofdminoren van $\mathbf{A}$. Zo een hoofdminor komt neer op de determinant van een adjacentiematrix $\mathbf{A}'$ van een geïnduceerde deelgraaf Γ' van Γ door een willekeurige verzameling van $2j+1$ toppen. Er zijn nu twee mogelijkheden.

Onderstel dat Γ' geen cykel van lengte $2j+1$ bevat. Daar Γ, en dus ook Γ', geen cykels van oneven lengte kleiner dan $2j+1$ bevat, is Γ' bipartiet. De karakteristieke veelterm is dus een oneven functie wegens stelling 2.4.5, wat impliceert dat de determinant van $\mathbf{A}'$ nul is (zie bijvoorbeeld stelling 2.2.8).

Onderstel dat Γ' wel een cykel van lengte $2j+1$ bevat. Als Γ' een boog heeft die niet tot die cykel behoort, dan zien we direct in dat Γ' een cykel van oneven lengte kleiner dan $2j+1$ bevat, een strijdigheid. Dus Γ' *is* een cykel van oneven lengte en $\det \mathbf{A}' = 2$ wegens lemma 2.4.6.

We besluiten dus dat $-c_{2j+1}$ gelijk is aan het dubbele van het aantal $(2j+1)$-cykels van Γ. Is $j < i$, dan heeft dit tot gevolg dat $c_{2j+1} \neq 0$, een strijdigheid. Dus $i = j$ en de eigenschap is bewezen. □