

G2.1: Principe van Hamilton

- We hebben een systeem met N deeltjes, beschreven aan de hand van $3N$ Cartesische coördinaten, eventueel onderworpen aan n_b holonome bindingen die het aantal vrijheidsgraden reduceren tot $n_q = 3N - n_b$. In elk geval kan de toestand van het systeem beschreven worden met n_q veralgemeende coördinaten (q_1, \dots, q_{n_q}) , een punt in een n_q -dimensionale ruimte die de *configuratieruimte* wordt genoemd.
- Onder invloed van de krachten evolueren de veralgemeende coördinaten in de tijd, m.a.w. het punt in de configuratieruimte $(q_1(t), \dots, q_{n_q}(t))$ beschrijft een *baan* of een *pad*, $\{q_k(t)\}$ in de configuratieruimte. Maar welk pad wordt gevolgd tussen een beginconfiguratie op t_1 , $\{q_k(t_1)\}$, en een eindconfiguratie op t_2 , $\{q_k(t_2)\}$?

G2.1: Principe van Hamilton

- De theoretische discussie blijft beperkt tot systemen met holonome bindingen en conservatieve toegepaste krachten (dit zijn de "gegeven" krachten die geen reactiekrachten zijn op bindingen). Er zijn veel tussenvormen en speciale gevallen mogelijk, maar een behandeling is niet zinvol in een basis cursus (en kan eventueel worden uitgespit in latere jaren).
- We tonen aan dat het systeem evolueert tussen t_1 en t_2 zó, dat de actie-integraal

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (94)$$

met L de Lagrangiaan, extremaal wordt voor het fysisch gerealiseerde pad. Dit vergt enige uitleg.

G2.2: Variatie analyse

- Bekijk een (gladde) functie $y(x)$ in het 2D xy vlak. De enige voorwaarde voor $y(x)$ is dat ze een beginpunt (x_1, y_1) en een eindpunt (x_2, y_2) verbindt, m.a.w.

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{en} \quad y(x_2) = y_2 \quad (95)$$

Verder zal met $\dot{y}(x)$ de afgeleide functie $\frac{dy}{dx}(x)$ bedoeld worden.

- Er zijn uiteraard veel dergelijke paden $y(x)$ tussen (x_1, y_1) en (x_2, y_2) mogelijk.
- Gegeven een functie van drie variabelen $f(y, \dot{y}, x)$ dan kan voor elk pad $y(x)$ de volgende integraal berekend worden:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x), \dot{y}(x), x) \quad (96)$$

De waarde van de integraal hangt duidelijk van het pad $y(x)$ af. De vraag is dan voor welk pad de integraal *stationair* wordt.

G2.2: Variatie analyse

- De integraal J is stationair voor een pad $y(x)$ als voor een kleine vervorming van het pad, de waarde van de integraal niet verandert (tot op 1e orde in de kleine vervorming). De integraal is dan extremaal (minimaal of maximaal). Mathematisch kan dit als volgt worden uitgedrukt:
- Stel dat $y(x)$ het pad is waarvoor J stationair wordt. Bekijk een familie van paden $y(x, \alpha)$, geparametriseerd aan de hand van een parameter α :

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x) \quad (97)$$

Hierbij is $\eta(x)$ een arbitraire functie, behalve dat

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (98)$$

zodat elk pad $y(x, \alpha)$ de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) verbindt.

- Het is duidelijk dat een pad $y(x, \alpha)$, voor voldoende kleine α , in de buurt ligt van $y(x)$, en ermee samenvalt als $\alpha = 0$.

G2.2: Variatie analyse

- De integraal J kan geëvalueerd worden voor alle paden $y(x, \alpha)$, en wordt zo een functie van α ,

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) \quad (99)$$

- Het stationair zijn van de integraal voor $y(x)$, m.a.w. voor $\alpha = 0$, vereist dan dat

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = 0 \quad (100)$$

- De afgeleide naar α kan door het integratieteken geschoven worden,

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{d\alpha} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) \quad (101)$$

en werkt in op de α -afhankelijkheid in het 1e argument $y(x, \alpha)$ en het 2e argument $\dot{y}(x, \alpha)$ van f .

G2.2: Variatie analyse

- Kettingregel toepassen

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y}(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) \right] \frac{d}{d\alpha} y(x, \alpha) \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) \right] \frac{d}{d\alpha} \dot{y}(x, \alpha) \right\} \end{aligned} \quad (102)$$

- Gelet op de definitie in vgl.(97), is

$$\frac{d}{d\alpha} y(x, \alpha) = \eta(x) \quad \text{en} \quad \frac{d}{d\alpha} \dot{y}(x, \alpha) = \dot{\eta}(x) \quad (103)$$

Tevens moet de afgeleide $\frac{dJ}{d\alpha}$ geëvalueerd worden voor $\alpha = 0$ zodat, in het argument van $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}$, $y(x, \alpha = 0) = y(x)$ en $\dot{y}(x, \alpha = 0) = \dot{y}(x)$ kan gesteld worden.

G2.2: Variatie analyse

- Hiermee wordt

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y}(y(x), \dot{y}(x), x) \right] \eta(x) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y(x), \dot{y}(x), x) \right] \dot{\eta}(x) \right\} \quad (104)$$

- In de tweede term passen we partiële afleiding toe op het product $h(x)\dot{\eta}(x)$, waarbij

$$h(x) = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y(x), \dot{y}(x), x) \quad (105)$$

Er geldt

$$\int_{x_1}^{x_2} dx h(x) \frac{d\eta}{dx}(x) = h(x_2)\eta(x_2) - h(x_1)\eta(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \frac{dh}{dx}(x) \quad (106)$$

Gelet op vgl.(98) verdwijnen de eerste twee termen in (106).

G2.2: Variatie analyse

- Finaal kan vgl.(104) herschreven worden als

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y}(y(x), \dot{y}(x), x) \right] - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y(x), \dot{y}(x), x) \right] \right\} \quad (107)$$

- De voorwaarde voor stationariteit was dat de integraal in vgl.(107) nul is, en dit moet gelden voor een *arbitraire* functie $\eta(x)$ (die voldoet aan vgl.(98). Dit kan enkel als de factor tussen $\{ \}$ in het integrandum verdwijnt over het integratie-interval.
- We zien dus dat het pad $y(x)$ de integraal in vgl.(96) stationair maakt, als $y(x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y, \dot{y}, x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y, \dot{y}, x) \right) \quad (108)$$

G2.2: Variatie analyse

- De differentiaalvergelijking (108) wordt de *Euler-Lagrange* vergelijking genoemd, geassocieerd met het variationeel probleem "vind het pad dat de integraal in vgl.(96) extremaal maakt".
- Het is duidelijk dat de Lagrangevergelijkingen dezelfde structuur hebben, en dus ook kunnen afgeleid worden puur op basis van een variationeel principe.
- Als toepassing bekijken we een eenvoudig voorbeeld (waar we vooraf de oplossing weten), nl. het kortste pad tussen twee punten.
- Heel krachtige techniek, bvb. het brachistochroon probleem. Misschien in een oefeningenles.

G2.2: Variatie analyse

- De infinitesimale afstand langs een curve $y(x)$ wordt gegeven door

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + (\dot{y})^2} \quad (109)$$

- De afstand van het pad $y(x)$ tussen (x_1, y_1) en (x_2, y_2) wordt dan

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + (\dot{y})^2} \quad (110)$$

- Dit is een probleem van het type in vgl.(96), met $f(y, \dot{y}, x) = \sqrt{1 + (\dot{y})^2}$. We hebben in dit geval

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}} \quad (111)$$

G2.2: Variatie analyse

- De corresponderende Euler-Lagrange vergelijking wordt

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}} \right) = 0 \quad (112)$$

- Bijgevolg moet $\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}} \right)$ constant zijn, wat impliceert dat \dot{y} constant is, dus $y(x) = ax + b$ is lineair.
- Uitdrukken dat $y(x_1) = y_1$ en $y(x_2) = y_2$ bepaalt a en b , en de oplossing is het lijnstuk door de twee punten,

$$y(x) = \frac{y_2(x - x_1) + y_1(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \quad (113)$$

G2.3: Lagrange vergelijking uit het principe van Hamilton

- De uitbreiding van het probleem in vgl.(96) tot meerdimensionale functies verloopt analoog. I.p.v. $y(x)$ hebben we nu een $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ functie $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ als pad dat een beginconfiguratie $(y_1(x_1), y_2(x_1), \dots, y_n(x_1))$ voor $x = x_1$ verbindt met een eindconfiguratie $(y_1(x_2), y_2(x_2), \dots, y_n(x_2))$ voor $x = x_2$.
- We vragen ons opnieuw af onder welke voorwaarden het pad $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ een stationaire waarde oplevert voor een integraal van het type

$$J = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y_1(x), \dots, y_n(x), \dot{y}_1(x), \dots, \dot{y}_n(x), x) \quad (114)$$

G2.3: Lagrange vergelijking uit het principe van Hamilton

- Voer terug een familie paden in rond $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ aan de hand van de parametrisatie

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x) + \alpha \eta_i(x), \quad \text{met } i = 1, 2, \dots, n \quad (115)$$

De $\eta_i(x)$ zijn arbitraire functies, behalve dat $\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0$.

- Evaluatie van de integraal met het pad $(y_1(x, \alpha), y_2(x, \alpha), \dots, y_n(x, \alpha))$ levert een functie van α

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y_1(x, \alpha), \dots, y_n(x, \alpha), \dot{y}_1(x, \alpha), \dots, \dot{y}_n(x, \alpha), x) \quad (116)$$

G2.3: Lagrange vergelijking uit het principe van Hamilton

- Stationariteit van (114) voor het pad $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ betekent dat

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \dot{\eta}_i \right) \end{aligned} \quad (117)$$

- De termen in het integrandum met $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \dot{\eta}_i$ worden weer omgezet met partiële integratie tot termen $-\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right) \eta_i$. De "stoktermen" verdwijnen wegens $\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0$.

G2.3: Lagrange vergelijking uit het principe van Hamilton

- Hiermee wordt Vgl.(117)

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_i \eta_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \quad (118)$$

- Dit moet gelden voor arbitraire functies $\eta_i(x)$, zodat de factor die elke η_i vermenigvuldigt nul moet zijn. De corresponderende Euler-Lagrange vergelijkingen zijn dan

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \quad (119)$$

G2.3: Lagrange vergelijking uit het principe van Hamilton

- De actie-integraal in vgl.(94) kan nu op dezelfde manier geïnterpreteerd worden. Eisen dat

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t) \quad (120)$$

stationair is voor het fysisch gerealiseerde pad $\{q_k(t)\}$ in de configuratieruimte, is equivalent met de corresponderende Euler-Lagrange vergelijkingen voor dit variationeel probleem,

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (121)$$

wat precies de voorheen afgeleide Lagrange bewegingsvergelijkingen zijn.

G2.5: Voordelen van een variationele formulering

(Enkel het begin van dit hoofdstuk wordt behandeld)

- De variationele formulering is heel compact, in termen van de actie-integraal die uitgedrukt wordt met behulp van fysische grootheden (kinetische energie en potentialen) die een betekenis hebben zonder dat er een bepaalde keuze van de veralgemeende coördinaten moet gemaakt worden.
- Uit de variationele formulering volgt onmiddellijk dat de Lagrangiaan slechts bepaald is op een totale tijdsafgeleide van een functie van de coördinaten en de tijd na. Immers, stel dat een systeem beschreven wordt door een Lagrangiaan L . Definieer een nieuwe Lagrangiaan L' als

$$L'(q_k, \dot{q}_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t) + \frac{d}{dt}(h(q_k, t)) \quad (122)$$

De actie-integraal I' van L' wordt

$$I' = \int_{t_1}^{t_2} dt \{L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t) + \frac{d}{dt}(h(q_k(t), t))\} \quad (123)$$

G2.5: Voordelen van een variationele formulering

- De bijdrage van de laatste term in het integrandum, als totale tijdsafgeleide, reduceert zich tot

$$h(q_k(t_2), t_2) - h(q_k(t_1), t_1) \quad (124)$$

en heeft dezelfde waarde voor alle paden die de beginconfiguratie $\{q_k(t_1)\}$ met de eindconfiguratie $\{q_k(t_2)\}$ verbinden. Het speelt dus geen rol in het variationeel probleem, en het stationair zijn van I en I' geeft dezelfde oplossing voor het fysisch gerealiseerd pad.

- Dit moet ook rechtstreeks volgen uit de Lagrange vergelijkingen (anders is er een inconsistentie), maar dit is veel lastiger. De additionele totale tijdsafgeleide in vgl.(122) is

$$\frac{d}{dt}(h(q_k, t)) = \sum_{\ell} \frac{\partial h}{\partial q_{\ell}} \dot{q}_{\ell} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (125)$$

G2.5: Voordelen van een variationele formulering

- De ingrediënten in de Lagrange vergelijkingen voor L' worden dan

$$\begin{aligned}\frac{\partial L'}{\partial q_k} &= \frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_{\ell} \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_{\ell}} \dot{q}_{\ell} + \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial t} \\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial h}{\partial q_k} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{\ell} \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_{\ell}} \dot{q}_{\ell} + \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial t} \quad (126)\end{aligned}$$

- We zien inderdaad dat in de Lagrange vergelijkingen de termen in h wegvallen, en L en L' geven dezelfde bewegingsvergelijkingen,

$$0 = \frac{\partial L'}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (127)$$

G2.6: Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

- Stel: een systeem met n_q vrijheidsgraden. De dynamica wordt beschreven met de Lagrange vergelijkingen, dus met n_q 2e orde differentiaalvergelijkingen. Een algemene oplossing vereist $2n_q$ integratieconstanten, die kunnen vastgelegd worden door bvb. de *beginvoorwaarden* op tijdstip $t = 0$ (dit zijn de veralgemeende coördinaten $q_k(t = 0)$ en veralgemeende snelheden $\dot{q}_k(t = 0)$). In de meeste gevallen zullen de bewegingsvergelijkingen overigens niet exact integreerbaar zijn, en moet men de zaak numeriek behandelen.
- Soms weet men op voorhand dat een bepaalde functie $f(q_k, \dot{q}_k, t)$ constant blijft in de tijd gedurende de beweging. Dan noemt men f een *eerste integraal van de beweging*. Dit vergemakkelijkt de analyse van de oplossingen van het probleem (zie bvb. het centrale kracht probleem in hoofdstuk 3).
- Alle behoudswetten (zie G1.1) zijn van dit type, en we zullen bekijken hoe deze in het Lagrange formalisme naar voor komen.

G2.6: Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

- Bekijk deeltjes interagerend met conservatieve krachten, dus $\mathbf{F}_i = -\nabla_i V(\mathbf{r}_i)$. We werken met Cartesische coördinaten, en de Lagrangiaan is dus

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{r}}_i)^2 - V(\mathbf{r}_i) \quad (128)$$

- De afgeleide naar de Cartesische x -component van de snelheid van deeltje i is

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i = p_{ix} \quad (129)$$

niets anders dan de x -component van de impuls of *linear moment* van deeltje i .

G2.6: Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

- Dit suggereert om, als we werken met veralgemeende coördinaten q_k , de definitie in te voeren

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (130)$$

met het veralgemeend moment p_k het (*canonisch*) *toegevoegd moment* van de coördinaat q_k .

- Een veralgemeend moment heeft niet noodzakelijk de dimensie van impuls, wel moet het product ($p_k \dot{q}_k$) de dimensie van energie hebben.
- Als een bepaalde q_k niet voorkomt in de Lagrangiaan (eventueel komt \dot{q}_k wel voor!) dan noemt men q_k een *cyclische coördinaat*.

G2.6: Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

- Voor een cyclische coördinaat q_k geldt dus dat $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$, en uit de Lagrange vergelijking volgt dan automatisch dat

$$\dot{p}_k = \frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (131)$$

- Bijgevolg is het toegevoegd moment van een cyclische coördinaat altijd een behouden grootte.

G2.6: Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

(1e voorbeeld: een veralgemeende coördinaat komt overeen met een translatie in een bepaalde richting.)

- Stel dat als een bepaalde coördinaat q_1 verandert met een infinitesimaal bedrag dq_1 , het hele systeem een translatie ondergaat over dq_1 in een vaste richting langs éénheidsvector \mathbf{n} . De Cartesische coördinaten van de deeltjes, uitgedrukt met veralgemeende coördinaten, voldoen dus aan

$$\mathbf{r}_i(q_1 + dq_1, q_2, \dots) = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots) + (dq_1)\mathbf{n} \quad (132)$$

zodat een constante vector wordt bekomen voor

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} = \mathbf{n} \quad (133)$$

G2.6: Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

(1e voorbeeld: een veralgemeende coördinaat komt overeen met een translatie in een bepaalde richting.)

- Het is duidelijk dat dit overeenkomt met een verschuiving in de richting \mathbf{n} van de oorsprong van het Cartesisch assenstelsel. De kinetische energie kan niet afhangen van de keuze van de oorsprong, zodat

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_1} = 0 \quad (134)$$

- Dit volgt ook uit de formules, gelet op het verband (76) tussen Cartesische en veralgemeende snelheden

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_k} \dot{\mathbf{q}}_k \quad (135)$$

Afleiden naar q_1 levert

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \mathbf{q}_1} = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_k \partial \mathbf{q}_1} \dot{\mathbf{q}}_k = \sum_k \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{q}_k} \dot{\mathbf{q}}_k = 0 \quad (136)$$

G2.6: Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

(1e voorbeeld: een veralgemeende coördinaat komt overeen met een translatie in een bepaalde richting.)

- Dit zegt dat de Cartesische snelheden niet afhangen van een translatiecoördinaat die voldoet aan vgl.(133), wat logisch is. De kinetische energie $T = \sum_i \frac{m_i}{2} (\dot{\mathbf{r}}_i)^2$ hangt dus evenmin van q_1 af, zodat, gelet op vgl.(91),

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = Q_1 \quad (137)$$

met Q_1 de veralgemeende kracht geassocieerd met q_1 .

- De Lagrange vergelijking voor q_1 is dan equivalent met

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \dot{p}_1 = Q_1 \quad (138)$$

G2.6: Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

(1e voorbeeld: een veralgemeende coördinaat komt overeen met een translatie in een bepaalde richting.)

- De veralgemeende kracht Q_1 is in dit geval

$$Q_1 = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} = \left(\sum_i \mathbf{F}_i \right) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \quad (139)$$

niets anders dan de component van de totale kracht \mathbf{F} in de richting \mathbf{n} .

- We onderstellen conservatieve krachten (die enkel van de coördinaten afhangen) dus

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (140)$$

Het moment toegevoegd aan q_1 is

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_1} \quad (141)$$

G2.6: Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

(1e voorbeeld: een veralgemeende coördinaat komt overeen met een translatie in een bepaalde richting.)

- Gelet op vgl.(80) is

$$p_1 = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_1} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (142)$$

gegeven door de component van de totale impuls \mathbf{P} in de richting \mathbf{n} .

- De Lagrange vergelijking (138) is dus equivalent met

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \quad (143)$$

en reproduceert de bewegingsvergelijking (42) voor de totale impuls, geprojecteerd op een richting \mathbf{n} .

G2.6: Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

(1e voorbeeld: een veralgemeende coördinaat komt overeen met een translatie in een bepaalde richting.)

- Als de potentiaal V niet afhangt van q_1 , dan is q_1 een cyclische coördinaat. In dat geval is p_1 een behouden grootte, m.a.w. $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ is constant in de tijd.
- Dit hangt nauw samen met een symmetrie-eigenschap van het systeem: het feit dat de potentiaal V niet van q_1 afhangt betekent dat het systeem invariant is onder een translatie in de richting \mathbf{n} , met als gevolg dat de component $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ behouden is.

G2.6: Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

(2e voorbeeld: een veralgemeende coördinaat komt overeen met een rotatie rond een bepaalde as.)

- Stel dat als een bepaalde coördinaat q_1 verandert met een infinitesimaal bedrag dq_1 , het hele systeem een rotatie ondergaat over een hoek dq_1 rond een as met vaste richting \mathbf{n} . De Cartesische coördinaten van de deeltjes, uitgedrukt met veralgemeende coördinaten, voldoen dus aan (zie Fig.2.8)

$$\mathbf{r}_i(q_1 + dq_1, q_2, \dots) = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots) + (dq_1)\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots) \quad (144)$$

zodat

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i \quad (145)$$

G2.6: Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

(2e voorbeeld: een veralgemeende coördinaat komt overeen met een rotatie rond een bepaalde as.)

- Dit komt overeen met een rotatie van het Oxyz Cartesisch assenstelsel rond een as met richting \mathbf{n} door de oorsprong O. De kinetische energie kan niet afhangen van de keuze van de oriëntatie van het assenstelsel, zodat

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0 \quad (146)$$

- Opnieuw kan dit afgeleid worden uit de formules, gelet op het verband (76) tussen Cartesische en veralgemeende snelheden

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (147)$$

Afleiden naar q_1 levert nu

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_1} = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_1} \dot{q}_k = \mathbf{n} \times \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}_i \quad (148)$$

G2.6: Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

(2e voorbeeld: een veralgemeende coördinaat komt overeen met een rotatie rond een bepaalde as.)

- Dit betekent dat de *groottes* van de Cartesische snelheden niet afhangen van een rotatiecoördinaat die voldoet aan vgl.(145), vermits

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (\dot{\mathbf{r}}_i)^2 = 2\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_1} = 2\dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}_i) = 0 \quad (149)$$

De kinetische energie $T = \sum_i \frac{m_i}{2} (\dot{\mathbf{r}}_i)^2$ hangt dus evenmin van q_1 af, zodat, gelet op vgl.(91),

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = Q_1 \quad (150)$$

met Q_1 de veralgemeende kracht geassocieerd met q_1 .

- De Lagrange vergelijking voor q_1 is dan

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \dot{p}_1 = Q_1 \quad (151)$$

G2.6: Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

(2e voorbeeld: een veralgemeende coördinaat komt overeen met een rotatie rond een bepaalde as.)

- De veralgemeende kracht Q_1 is in dit geval

$$Q_1 = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_1} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{n} \cdot \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) \quad (152)$$

de component in de richting \mathbf{n} van het totale krachtmoment $\mathbf{N} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$.

- We onderstellen conservatieve krachten (die enkel van de coördinaten afhangen) dus

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (153)$$

Het moment toegevoegd aan q_1 is

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_1} \quad (154)$$

G2.6: Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

(2e voorbeeld: een veralgemeende coördinaat komt overeen met een rotatie rond een bepaalde as.)

- Gelet op vgl.(80) is

$$p_1 = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_1} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{n} \cdot \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i). \quad (155)$$

Het toegevoegd moment p_1 van een rotatiecoördinaat is dus de component volgens \mathbf{n} van het totale draaimoment

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i.$$

- De Lagrange vergelijking (151) is dus equivalent met

$$\dot{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} \quad (156)$$

en reproduceert de bewegingsvergelijking voor het totaal draaimoment, geprojecteerd op een richting \mathbf{n} .

G2.6: Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen

(2e voorbeeld: een veralgemeende coördinaat komt overeen met een rotatie rond een bepaalde as.)

- Als de potentiaal V niet afhangt van q_1 , dan is q_1 een cyclische coördinaat. In dat geval is p_1 een behouden grootheid, m.a.w. $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ is constant in de tijd.
- Dit hangt opnieuw nauw samen met een symmetrie-eigenschap van het systeem: het feit dat de potentiaal V niet van q_1 afhangt betekent dat het systeem invariant is onder een rotatie rond een as met richting \mathbf{n} , met als gevolg dat de component $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ behouden is. Het verband tussen symmetrieën en behouden grootheden (stelling van Noether) wordt verder uitgewerkt in het hoofdstuk over Hamilton mechanica.