Iteratieve methoden: situering

Iteratieve methoden: convergentiestelling

Definitie: $(V, \|\cdot\|)$ een Banach-ruimte, $\Phi : D \to D$, met D een gesloten verzameling in V.
We noemen Φ *contractief* als en slechts als er een $\alpha < 1$ bestaat zodat

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \alpha \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in D.$$

Stelling 3.1 [Banach-contractietheorema]

Zij $\Phi : D \to D$ een contractieve afbeelding. Dan heeft Φ precies één vast punt ξ ($\xi = \Phi(\xi)$), en voor elke keuze $x^{(0)} \in D$ convergeert de iteratierij $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$ naar ξ.

Convergentiestelling: voorbeeld

Zij $V = \mathbb{R}$ en $D = [1,2]$, en $\phi : D \to D$ is gegeven door

$$\phi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \; .$$

Dan geldt

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}| \, |x - y| \leq \frac{1}{2}|x - y| \; .$$

Dus ϕ is contractief en de iteratie

$$x^{(k+1)} = \frac{x^{(k)}}{2} + \frac{1}{x^{(k)}}$$

convergeert voor elke $x^{(0)} \in [1,2]$ naar de oplossing $\xi = \sqrt{2}$ van $x = \phi(x)$.

Voorbeeld: hoe “snel” is er convergentie?

1.500000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
1.416666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666667
1.414215686274509803921568627450980392156862745098039215686274509803922
1.414213562374689910626295578890134910116559622115744044584905019200054
1.414213562373095048801689623502530243614981925776197428498289498623196
1.414213562373095048801688724209698078569671875377234001561013133113265
1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679737990733

Voorbeeld: hoe "snel" is er convergentie?

1.50000000000000000000000000000
1.25000000000000000000000000000
1.37500000000000000000000000000
1.43750000000000000000000000000
1.40625000000000000000000000000
1.42187500000000000000000000000
1.41406250000000000000000000000
1.41796875000000000000000000000
1.41601562500000000000000000000
1.41503906250000000000000000000
1.41455078125000000000000000000
1.41430664062500000000000000000
1.41418457031250000000000000000
1.41424560546875000000000000000
1.41421508789062500000000000000
1.41419982910156250000000000000
1.41420745849609375000000000000
1.41421127319335937500000000000
1.41421318054199218750000000000
1.41421413421630859375000000000
1.41421365737915039062500000000
1.41421341896057128906250000000
1.41421353816986083984375000000
1.41421359777450561523437500000
1.41421356797218322753906250000
1.41421355307102203369140625000
1.41421356052160263061523437500
1.41421356424689292907714843750
1.41421356238424777984619140625
1.41421356145292520523071289063
1.41421356191858649253845214844
1.41421356215141713619232177735
1.41421356226783245801925659180
1.41421356232604011893272399903

Orde van convergentie

- $V = \mathbb{R}$; $D = [a, b]$; $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ is continu afleidbaar is over $[a, b]$
- ξ is een vast punt van ϕ: $\phi(\xi) = \xi$
- $\boxed{\text{Onderstel dat } |\phi'(\xi)| < 1}$

Dan:

- Er bestaat een omgeving $[\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$ waar $|\phi'(x)| \leq c < 1$ voor $x \in [\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$
- ϕ *contractief* in $[\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$

Dus: de rij $x_k = \phi(x_{k-1})$ convergeert dus naar ξ als $x_0 \in [\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$.

Orde van convergentie

$$\begin{aligned} \xi - x_{k+1} &= \phi(\xi) - \phi(x_k) \\ &= (\xi - x_k)\phi'(\xi + \theta(x_k - \xi)) \qquad (0 \le \theta \le 1)\ , \end{aligned}$$

m.a.w.

$$\frac{\xi - x_{k+1}}{\xi - x_k} = \phi'(\xi + \theta(x_k - \xi)) \longrightarrow_{k\to\infty} \phi'(\xi)\ .$$

$\boxed{\text{Als } \phi'(\xi) \neq 0}$: *lineaire convergentie.*

$$|\xi - x_{k+1}| \le c|\xi - x_k| \qquad (c < 1)$$

c is de *maat* van de convergentie.

$\boxed{\text{Als } \phi'(\xi) = 0}$: convergentie is sneller.

Orde van convergentie

Onderstel $\phi \in C^2[a, b]$ en $\phi'(\xi) = 0$.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \phi(x_k) = \phi(\xi + x_k - \xi) \\ &= \phi(\xi) + (x_k - \xi)\phi'(\xi) + \frac{1}{2}(x_k - \xi)^2 \phi''(\xi + \theta(x_k - \xi)) \end{aligned}$$

m.a.w.

$$\frac{x_{k+1} - \xi}{(x_k - \xi)^2} \longrightarrow_{k\to\infty} \frac{1}{2}\phi''(\xi) \, .$$

Als $\phi''(\xi) \neq 0$: *kwadratische convergentie*.
Algemeen: als er een $c > 0$ bestaat zodanig dat

$$|\xi - x_{k+1}| \leq c|\xi - x_k|^p \qquad , \forall k,$$

dan is p $(p > 1)$ de *orde van de convergentie* voor de rij x_k.
Conclusie: $|\phi'(\xi)| < 1 \Rightarrow$ lokale convergentie.
$\phi'(\xi) \neq 0$ lineaire convergentie;
$\phi'(\xi) = 0$ minstens kwadratische convergentie.

Newton-Raphson methode

Newton-Raphson methode

NR: $x_{k+1} = \phi(x_k)$ met $\boxed{\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$.

Berekening:

$$\phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$\phi''(x) = \left(f'(x)^2 f''(x) + f(x)f'(x)f'''(x) - 2f(x)f''(x)^2\right)/f'(x)^3 \ .$$

$\boxed{\text{Als } f'(\xi) \neq 0}$, dan is $\phi'(\xi) = 0$ en $\phi''(\xi) = f''(\xi)/f'(\xi)$: zeker lokale convergentie, minstens kwadratisch.

Als $f''(\xi) \neq 0$ is de orde van convergentie $p = 2$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - \xi}{(x_k - \xi)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \ .$$

Newton-Raphson methode

$\boxed{\text{Als } f'(\xi) = 0}$? Meer algemeen: $f(x) \in C^{q+1}[a, b]$ en

$$f(\xi) = f'(\xi) = \cdots = f^{(q-1)}(\xi) = 0, \qquad f^{(q)}(\xi) \neq 0 \, .$$

Stel $h(x) = f(x)/(x-\xi)^q$ voor $x \neq \xi$ en $h(\xi) = f^{(q)}(\xi)/q!$.
Uit $f(x) = (x-\xi)^q h(x)$:

$$f'(x) = q(x-\xi)^{q-1} h(x) + (x-\xi)^q h'(x) \, .$$

En uit $\phi = x - \frac{f}{f'}$:

$$\phi(x) = x - (x-\xi) \frac{h(x)}{qh(x) + (x-\xi)h'(x)} \, ,$$

$$\phi'(x) = 1 - \frac{h(x)}{qh(x) + (x-\xi)h'(x)} - (x-\xi) \frac{d}{dx} \left(\frac{h(x)}{qh(x) + (x-\xi)h'(x)} \right) \, ,$$

Gevolg: $\phi'(\xi) = 1 - \frac{1}{q} < 1$, dus zeker convergentie, slechts lineair met maat $1 - 1/q$.

Newton-Raphson methode

Voorbeeld. We berekenen de wortel van $x - e^{-x/2} = 0$ met de Newton-Raphson-methode met $x_0 = 1.0$ als startwaarde.

k	x_k	$\lvert\xi - x_k\rvert / \lvert\xi - x_{k-1}\rvert^2$
0	1.0	–
1	0.7	0.06
2	0.70347	0.0651
3	0.703467422498	0.0650523
4	0.70346742249839	–

De laatste kolom geeft het kwadratisch gedrag van de convergentie weer, want

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{x_k - \xi}{(x_{k-1} - \xi)^2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \right| \simeq 0.065052330\ldots\ .$$