Oefening 1.5.32 (Padsamenhang is een continue invariant)**.** (B)Zij X, Y metrische ruimten. Zij f een continue afbeelding $X \to Y$. Als X padsamenhangend is, toon dan aan dat ook $f(X)$ padsamenhangend is.

Oefening 1.5.33. (B)Zij X een topologische ruimte. Toon aan:

1. Elke padsamenhangende $V \subseteq X$ is bevat in een padsamenhang-component van X.
2. Een padsamenhang-component van X is padsamenhangend.

Oefening 1.5.34. (B)Toon aan dat voor een samenhangende topologische ruimte X de volgende uitspraken equivalent zijn:

1. X is padsamenhangend
2. elke padsamenhang-component van X is open
3. elke $x \in X$ heeft een padsamenhangende omgeving.

Oefening 1.5.35. (B)Zij $f: X \to Y$ een continue afbeelding tussen topologische ruimten. Toon aan: als X samenhangend is, dan is de grafiek $\{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ van f samenhangend.

Oefening 1.5.36. (M)

1. Zij $V := (\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{1\}) \subseteq \mathbb{R}^2$. Toon aan dat V padsamenhangend is, maar $W := V \cup \{(0,0)\}$ niet.
2. Toon aan dat de grafiek $G \subseteq \mathbb{R}^2$ van de afbeelding $f\colon\ ]0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ padsamenhangend is, maar $G \cup \{(0,0)\}$ niet.
3. Geef een voorbeeld van een samenhangende, niet padsamenhangende metrische ruimte.

Oefening 1.5.37. (M)Zij V, W samenhangende deelverzamelingen van een topologische ruimte. Toon aan: als $\overline{V} \cap W \neq \emptyset$, dan is $V \cup W$ samenhangend.

Oefening 1.5.38.

1. (M)Zij V en W niet-lege gesloten deelverzamelingen van een topologische ruimte X. Toon aan: als $V \cup W$ en $V \cap W$ samenhangend zijn, dan zijn ook V en W samenhangend.
2. (B)Geef een voorbeeld van niet-samenhangende deelverzamelingen V, W van $\mathbb{R}$ met $V \cup W$ en $V \cap W$ samenhangend.

1.6 Morfismen

Een topoloog is iemand die geen koffiekop van een donut kan onderscheiden.

Definitie 1.6.1. In het algemeen is een **morfisme**[25] tussen verzamelingen met een gegeven structuur een afbeelding die die structuur behoudt. Een morfisme tussen metrische ruimten is dan ook een afbeelding die **isometrisch**[26] is, d.w.z. een afbeelding die de afstand bewaart (φ: $(M,d) \to (M',d')$ bewaart de afstand als $d'(\varphi(x),\varphi(y)) = d(x,y)$, voor elke $x, y \in M$).

[25] soms ook *homomorfisme* genaamd; om verwarring te vermijden met de term *homeomorfisme* (die we in deze paragraaf zullen ontmoeten), gebruiken we deze benaming niet

[26] er zijn verschillende conventies in de literatuur: soms wordt een afstandbewarende afbeelding pas isometrisch genoemd als ze ook bijectief is.

Eigenschap 1.6.2. *Een metrisch morfisme is injectief.*

Bewijs. Als $\varphi\colon (M,d) \to (M',d')$ isometrisch is en $\varphi(x) = \varphi(y)$, dan is $d(x,y) = d'(\varphi(x),\varphi(y)) = 0$. □

Definitie 1.6.3. Een **inbedding**[27] is een injectief morfisme. Wegens de vorige eigenschap noemt men een metrisch morfisme meestal een **isometrische inbedding**.
Een **isomorfisme** tussen twee verzamelingen met een gegeven structuur is een bijectief morfisme waarvoor ook de inverse een morfisme is.[28] Die twee verzamelingen zijn dan niet van elkaar te onderscheiden wat betreft de eigenschappen van die structuur.[29] Twee verzamelingen waartussen een isomorfisme bestaat, worden **isomorf** genoemd.
Een metrisch isomorfisme is dan ook een bijectieve isometrische afbeelding (vermits de inverse afbeelding dan ook de afstand bewaart), en wordt gewoonlijk een **isometrie** genoemd. Metrisch isomorfe ruimten worden gewoonlijk **isometrisch** genoemd.

Men beschouwt doorgaans de *continue afbeeldingen* als de morfismen tussen topologische ruimten. Op het eerste zicht lijkt dit vreemd, want zij bewaren de open verzamelingen niet noodzakelijk (zie oef. 1.2.21, enkel het *invers* beeld van een open verzameling is open).[30] Wat bewaren continue afbeeldingen dan wel? In een eerste aftelbaarheidsruimte wordt het antwoord gegeven door het rijenkenmerk: ze bewaren de convergentie van rijen.[31]

Definitie 1.6.4. Een isomorfisme tussen topologische ruimten wordt een **homeomorfisme** genoemd: het is een bijectieve continue afbeelding waarvoor ook de inverse continu is. Topologisch isomorfe ruimten worden **homeomorf** genoemd.
Een begrip (resp. eigenschap) dat behouden blijft onder homeomorfismen wordt een **topologisch** begrip (resp. eigenschap) genoemd. Een begrip (resp. eigenschap) dat behouden blijft onder isometrieën wordt een **metrisch** begrip (resp. eigenschap) genoemd.

In een topologische ruimte zijn alle begrippen die enkel afgeleid zijn uit het begrip *open verzameling* topologisch (want zij worden dan ook, zoals de open verzamelingen, bewaard onder homeomorfismen). Alle begrippen die gedefinieerd zijn enkel a.d.h.v. topologische begrippen en alle eigenschappen die enkel gebruik maken van topologische begrippen zijn ook topologisch. I.h.b. geldt dit voor de begrippen en eigenschappen uit §1.3 en §1.4.

Voorbeeld 1.6.5. 1. Het begrip *open bal* is geen topologisch begrip: bijv. in $\mathbb{R}^2$ wordt een open bal door het homeomorfisme $(x,y) \mapsto (x,2y)$ omgezet in een ellips.[32]
2. Het begrip *begrensde deelverzameling* in $\mathbb{R}$ is geen topologisch begrip (oefening (B)).

[27] soms ook **monomorfisme** genaamd

[28] Voor heel wat structuren is een bijectief morfisme steeds een isomorfisme, omdat de inverse automatisch ook een morfisme is (bijv. groepen, ringen, vectorruimten, metrische ruimten).

[29] Men kan de inwerking van een morfisme φ ook 'passief' bekijken als het hernoemen van de elementen in een gegeven verzameling (x wordt hernoemd in $\varphi(x)$, ...); de structuur die op de oorspronkelijke elementen lag, is dezelfde na hernoemen.

[30] Abstract gezien houdt niets ons tegen om de open afbeeldingen (afbeeldingen die open verzamelingen afbeelden op open verzamelingen) als de morfismen te beschouwen, maar continuïteit is gewoon een veel centraler begrip.

[31] In een willekeurige topologische ruimte bewaren ze de convergentie van netten of filters; of nog: ze bewaren de relatie '$x \in \overline{V}$' (zie oef. 1.4.30).

[32] Men noemt topologie daarom wel eens informeel 'meetkunde van rubberen lichamen': men mag een verzameling (beschouwd als topologische ruimte) onder homeomorfismen vervormen zoveel men wil, zoals het trekken aan (maar niet scheuren van) een rubberen object, haar topologische eigenschappen blijven dezelfde.

Vermits we een open verzameling in een metrische ruimte gedefinieerd hebben a.d.h.v. de metriek, is een isometrie tussen metrische ruimten ook een homeomorfisme en is elke topologische eigenschap in metrische ruimten ook een metrische eigenschap.
Dit geeft ook een belangrijke motivatie om topologische ruimten te bestuderen: heel wat concrete topologische ruimten in de praktijk zijn (zeker in de analyse) wel metrische ruimten, maar dan nog is het belangrijk te weten welke eigenschappen in metrische ruimten eigenlijk topologisch zijn. Men moet maar één homeomorfisme kunnen definiëren tussen twee topologische (i.h.b. metrische) ruimten om te weten dat *alle* topologische eigenschappen en begrippen (en dat zijn er heel wat!) in die ruimten dezelfde zijn.

Verdere ontwikkelingen 1.6.A. Voor een oriënteerbaar compact samenhangend (tweedimensionaal) oppervlak zonder rand[33] kan men aantonen dat het aantal handvatten op het oppervlak een topologische eigenschap is. Het aantal handvatten wordt het **genus** van het oppervlak genoemd.

Figuur 1.2: Oppervlakken met genus 1, 2 en 3

Omgekeerd kan men aantonen dat twee zulke oppervlakken met hetzelfde aantal handvatten homeomorf zijn. Het genus bepaalt m.a.w. de homeomorfieklasse van zulk oppervlak volledig. In het bijzonder is een oriënteerbaar compact samenhangend oppervlak zonder handvatten steeds homeomorf met het boloppervlak $\partial B_{\mathbb{R}^3}(0,1)$.
(De rand van) een koffiekop en de binnenband van een fietsband hebben allebei genus 1. De homeomorfieklasse van dit oppervlak wordt de (tweedimensionale) **torus** genoemd.

Gaan we een dimensie hoger, dan wordt het analoge probleem veel moeilijker:

Definitie 1.6.B. Een topologische ruimte X is **enkelvoudig samenhangend** als X samenhangend is en als elk gesloten pad in X continu vervormd kan worden tot een punt (zie cursus *Algebraïsche topologie*).

Een oriënteerbaar compact samenhangend (2-dimensionaal) oppervlak zonder rand is enkelvoudig samenhangend juist als haar genus 0 is.

Voorbeeld 1.6.C (Vermoeden van Poincaré)**.** Elke enkelvoudig samenhangende compacte driedimensionale variëteit (zie cursus *Differentiaalmeetkunde*) zonder rand is homeomorf met de zgn. 3-sfeer $S^3 := \partial B_{\mathbb{R}^4}(0,1)$.[34]

[33] *Rand* is hier niet gebruikt in de topologische betekenis (die afhangt van de ruimte waarin de variëteit ingebed is), maar in de intrinsieke betekenis (zie cursus Analyse II, bijv. een open schijf heeft geen rand, een gesloten schijf heeft enkel een cirkel als rand).
[34] we bekijken hier $\mathbb{R}^4$ met de Euclidische afstand

Henri Poincaré formuleerde deze stelling als een vermoeden in het begin van de 20ste eeuw. Een bewijs werd pas in 2003 gegeven door Grigori Perelman[35] gebruik makend van voorbereidend werk van Richard Hamilton. Opmerkelijk genoeg was de analoge stelling voor elke dimensie $d > 4$ al bewezen in 1961 door Stephen Smale en voor dimensie $d = 4$ in 1982 door Michael Freedman.

Oefening 1.6.6. (D)Toon aan dat twee metrieken d, d' op een verzameling M equivalent zijn als en slechts als de identieke afbeelding $(M,d) \to (M,d')$: $x \mapsto x$ een homeomorfisme is.

Oefening 1.6.7. (D)Toon aan: elke bijectieve afbeelding tussen discrete topologische ruimten is een homeomorfisme.

Oefening 1.6.8. (D)Gegeven zijn topologische ruimten X en Y. Als een bijectie $f : X \to Y$ een basis van X omzet in een basis van Y (d.w.z., er bestaat een basis $\mathscr{B}$ van X waarvoor $\{f(U) : U \in \mathscr{B}\}$ een basis is van Y), toon dan aan dat f een homeomorfisme is.

Oefening 1.6.9. (D)

1. Zij M een verzameling en (M',d') een metrische ruimte. Zij φ een bijectie $M \to M'$. Toon aan dat d: $M \times M \to \mathbb{R}$: $d(x,y) := d'(\varphi(x),\varphi(y))$ een afstand definieert op M en dat de ruimten (M,d) en (M',d') isometrisch zijn. (M.a.w., we kunnen de afstand d' op M 'overdragen' d.m.v. de afbeelding φ.)

2. Zij X een verzameling en (X',τ') een topologische ruimte. Zij φ een bijectie $X \to X'$. Toon aan dat $\tau := \{\varphi^{-1}(U) : U \in \tau'\}$ een topologie definieert op X en dat de ruimten (X,τ) en (X',τ') homeomorf zijn. (M.a.w., we kunnen de topologie τ' op X 'overdragen' d.m.v. de afbeelding φ.)

Oefening 1.6.10. (M)

1. Toon aan dat geen injectieve continue afbeelding van de cirkel $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ naar $\mathbb{R}$ bestaat. (De gewone topologie op de cirkel is de relatieve topologie uit $\mathbb{C}$.)

2. Toon aan dat volgende ruimten noch met $[0,1]$, noch met $\mathbb{R}$ homeomorf zijn: (a) S^1; (b) $\mathbb{R}^n$ als $n > 1$.

1.7 Compactheid: definities

We kunnen de definitie van een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ als een gesloten en begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ (cursus Analyse II) niet gebruiken in willekeurige topologische ruimten omdat het begrip *begrensd* daar niet gedefinieerd is.[36] We laten de eigenschap *gesloten en begrensd* daarom (voorlopig) links liggen.
Geïnspireerd door een andere eigenschap van compacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ (Bolzano-Weierstrass) definiëren we:

Definitie 1.7.1. Een topologische ruimte X is **rijcompact** als elke rij in X een convergente deelrij heeft.

---

[35] Perelman kreeg hiervoor een *Fields Medaille* en een *Millennium Prize*, die hij beide weigerde, naar verluidt omdat hij vond dat de bijdrage van Hamilton minstens zo groot was als zijn eigen bijdrage.

[36] Wegens voorbeelden 1.6.5 is gelijk welke eigenschap die samenvalt met *begrensd* in $\mathbb{R}$ niet topologisch.

Lemma 1.7.2. *Zij $(x_n)_n$ een rij in een eerste aftelbaarheidsruimte X. Dan convergeert een deelrij van $(x_n)_n$ naar $a \in X$ als en slechts als*

$$(\forall U \text{ omgeving van } a)(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \geqslant m)(x_n \in U).^{37}$$

Bewijs. Oefening (D). De implicatie '⇒' geldt in feite in een willekeurige topologische ruimte. □

We kunnen dit in eerste aftelbaarheidsruimten karakteriseren d.m.v. een eigenschap die doet denken aan de *stelling van de vernestelde compacta* in $\mathbb{R}^n$:

Eigenschap 1.7.3. *Een eerste aftelbaarheidsruimte X is rijcompact als en slechts als elke dalende rij $(F_n)_n$ van niet-lege, gesloten deelverzamelingen van X een niet-lege doorsnede heeft.*

Bewijs. ⇒: kies $x_n \in F_n$, voor elke $n \in \mathbb{N}$. Door het gegeven convergeert een deelrij $(x_{n_m})_m$ naar een element $x \in X$. We gaan na dat $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Kies $M \in \mathbb{N}$. Vermits $x_{n_m} \in F_{n_M}$ zodra $m \geqslant M$, is $x \in \overline{F_{n_M}} = F_{n_M}$ door eigenschap 1.4.15. Omdat M willekeurig is en $(F_n)_n$ dalend, is $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
⇐: zij $(x_n)_n$ een rij in X. We gaan na dat $(x_n)_n$ een convergente deelrij heeft. Om het gegeven te kunnen toepassen, definiëren we

$$F_m := \overline{\{x_n : n \geqslant m\}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.^{38}$$

Dan is $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ een dalende rij van niet-lege, gesloten deelverzamelingen van X. Door het gegeven bestaat $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m$. We tonen via lemma 1.7.2 aan dat een deelrij van $(x_n)_n$ convergeert naar x. Kies daartoe een omgeving U van x en $m \in \mathbb{N}$. Omdat $x \in F_m$, bestaat $n \geqslant m$ waarvoor $x_n \in U$. □

Opmerking 1.7.4. 'Niet-lege doorsnede'-eigenschappen zoals de vorige eigenschap zijn nuttig bij het oplossen van een soort van problemen dat *verwisselen van quantoren* genoemd wordt. Zij $P(x,y)$ een eigenschap die afhangt van $x \in V$ en $y \in W$ (V, W verzamelingen). Dikwijls komt het in een probleem voor dat we weten dat

$$(\forall x \in V)(\exists y \in W)P(x,y) \tag{1.1}$$

(of dat dit een haalbaar doel lijkt), maar dat we eigenlijk de sterkere eigenschap

$$(\exists y \in W)(\forall x \in V)P(x,y) \tag{1.2}$$

willen aantonen (met y dus onafhankelijk van x).
Bijvoorbeeld: als $V = \mathbb{R}$ en $W =]0,+\infty[$, dan is de eigenschap '$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continu' van het eerste type (voorafgegaan door '$\forall \varepsilon > 0$'), en 'f is gelijkmatig continu' van het tweede type (opnieuw voorafgegaan door '$\forall \varepsilon > 0$').
Om het verband met 'niet-lege doorsnede'-eigenschappen te zien, herschrijven we dit verzamelingtheoretisch: noteren we $F_x := \{y \in W : P(x,y)\}$, dan is

$$(1.1) \iff (\forall x \in V)(F_x \neq \varnothing)$$

terwijl

$$(1.2) \iff \bigcap_{x\in V} F_x \neq \varnothing.$$

[37] In een willekeurige topologische ruimte wordt een punt a met deze eigenschap een **limietpunt** van de rij genoemd

[38] We creëren de situatie uit het deel '⇒' opnieuw, nl. dat $x_n \in F_n$ voor elke n. We kiezen verder de *kleinst mogelijke* gesloten F_n die hieraan voldoen, omdat $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$ dan de *sterkste* informatie oplevert.

We willen dus een ‘niet-lege doorsnede’-eigenschap aantonen!
Neem nu concreet het geval waarin $V = \mathbb{N}$ en $W = X$ een rijcompacte eerste aftelbaarheidsruimte is. We stellen (zoals hierboven) $F_n := \{x \in X : P(n,x)\}$. Als die F_n gesloten zijn en $(F_n)_n$ dalend is, dan leert eigenschap 1.7.3 dat $F_n \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$, m.a.w. dat

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x \in X)P(n,x) \quad \Longrightarrow \quad (\exists x \in X)(\forall n \in \mathbb{N})P(n,x).$$

Of nog, door contrapositie, met $Q := \neg P$, dat

$$(\forall x \in X)(\exists n \in \mathbb{N})Q(n,x) \quad \Longrightarrow \quad (\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in X)Q(n,x).$$

Met het oog op toepassingen, o.a. onder de vorm van *verwisselen van quantoren*, is het nuttig om de voorwaarden op de rij $(F_n)_n$ zo zwak mogelijk te maken. Uit een willekeurige rij $(F_n)_n$ construeert men bijv. eenvoudig de dalende rij $(F_1 \cap \cdots \cap F_n)_n$. Dit brengt ons bij de volgende variant.

Definitie 1.7.5. Een familie $(V_i)_{i\in I}$ (met I een index-verzameling) van verzamelingen heeft de **eindige doorsnede-eigenschap** (kortweg: $(V_i)_i$ **is een EDE-familie**)[39] als voor elke eindige $I_F \subseteq I$, $\bigcap_{i\in I_F} V_i \neq \emptyset$.

Eigenschap 1.7.6. *Een eerste aftelbaarheidsruimte X is rijcompact als en slechts als elke EDE-rij $(F_n)_n$ van gesloten deelverzamelingen van X een niet-lege doorsnede heeft.*

Bewijs. $\Rightarrow$: pas eigenschap 1.7.3 toe op de rij $(F_1 \cap \cdots \cap F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$\Leftarrow$: door eigenschap 1.7.3, vermits elke dalende rij een EDE-rij is. $\square$

Door overgang op complementen kunnen we dit omzetten in een duale eigenschap van open verzamelingen, die zelf even geschikt is om quantoren mee te verwisselen:

Definitie 1.7.7. Een **bedekking** van een topologische ruimte X is een familie $(U_i)_{i\in I}$ van deelverzamelingen van X waarvoor $\bigcup_{i\in I} U_i = X$. De bedekking $(U_i)_{i\in I}$ is **open** als elke U_i open is; ze is **eindig** als de index-verzameling I eindig is. Een **deelbedekking** van een bedekking $(U_i)_{i\in I}$ is een bedekking $(U_i)_{i\in J}$ met $J \subseteq I$.

Lemma 1.7.8. *Elke EDE-rij van gesloten deelverzamelingen van X heeft een niet-lege doorsnede als en slechts als elke aftelbare open bedekking van X een eindige deelbedekking heeft.*

Bewijs. We gaan over op complementen:

$$\begin{aligned}
&(\forall (F_n)_n, F_n \subseteq X \text{ gesloten})\Big((F_n)_n \text{ is EDE-rij} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset\Big)\\
\iff\quad &(\forall (U_n)_n, U_n \subseteq X \text{ open})\Big((X\setminus U_n)_n \text{ is EDE-rij} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X\setminus U_n) \neq \emptyset\Big)\\
\iff\quad &(\forall (U_n)_n, U_n \subseteq X \text{ open})\Big((\forall F \subseteq \mathbb{N}, F \text{ eindig})\Big(\bigcup_{n\in F} U_n \neq X\Big) \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq X\Big)\\
\overset{\text{(contrapositie)}}{\iff}\quad &(\forall (U_n)_n, U_n \subseteq X \text{ open})\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X \Rightarrow (\exists F \subseteq \mathbb{N}, F \text{ eindig})\Big(\bigcup_{n\in F} U_n = X\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Dit betekent juist dat elke aftelbare open bedekking een eindige deelbedekking heeft. $\square$

[39] Engels: finite intersection property, FIP-family

Gevolg 1.7.9. *Een eerste aftelbaarheidsruimte X is rijcompact als en slechts als elke aftelbare open bedekking van X een eindige deelbedekking heeft.*

Een laatste, niet voor de hand liggende verzwakking betreft de kardinaliteit van de open bedekking:

Stelling 1.7.10 (Lindelöf)**.** *In een topologische ruimte X met een aftelbare basis heeft elke open bedekking een aftelbare deelbedekking.*[40]

Bewijs. Zij $(U_i)_{i\in I}$ een open bedekking van X en $\mathscr{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ een aftelbare basis. Dan is elke $U_i = \bigcup_{j\in J_i} B_{i,j}$ voor zekere $B_{i,j} \in \mathscr{B}$. Neem nu $n \in \mathbb{N}$. Als $B_n = B_{i,j}$ voor zekere $i \in I$ en $j \in J_i$, kies dan zulke i en j, en noem deze i_n en j_n. Noem A de verzameling van alle zulke $n \in \mathbb{N}$.[41] Dan is $X = \bigcup_{i,j} B_{i,j} = \bigcup_{n\in A} B_{i_n,j_n} \subseteq \bigcup_{n\in A} U_{i_n} \subseteq X$. □

Gevolg 1.7.11 (Heine-Borel[42])**.** *In een rijcompacte ruimte met een aftelbare basis heeft elke open bedekking een eindige deelbedekking.*

Bewijs. Combineer gevolg 1.7.9 en stelling 1.7.10. □

Deze verzwakking van de voorwaarden is zo nuttig gebleken voor het oplossen van problemen, dat ze de basis geworden is voor de definitie van compactheid in een topologische ruimte:

Definitie 1.7.12. Een topologische ruimte X is **compact** als elke open bedekking van X een eindige deelbedekking heeft.

Als een eerste aftelbaarheidsruimte X compact is, dan is ze ook rijcompact (gevolg 1.7.9); als X een aftelbare basis heeft, dan geldt ook het omgekeerde.

Door overgang op complementen verkrijgen we ook een verzwakking op de voorwaarden van $(F_n)_n$ in eigenschap 1.7.6:

Gevolg 1.7.13. *Een topologische ruimte X is compact als en slechts als elke EDE-familie $(F_i)_{i\in I}$ van gesloten deelverzamelingen van X een niet-lege doorsnede heeft.*

Bewijs. Zoals het bewijs van lemma 1.7.8. □

Compactheid is (bij definitie) een eigenschap van topologische ruimten (onafhankelijk van de topologische ruimte waarin ze als deelruimte bevat is, anders dan de begrippen *open* of *gesloten*). Een deelverzameling V van een topologische ruimte X is (bij definitie) compact als ze compact is als deelruimte. Men noteert $V \subset\subset X$ of $V \Subset X$ voor 'V is een compacte deelverzameling van X'.

Opmerking 1.7.14. In Analyse II hadden we een open bedekking van $V \subseteq \mathbb{R}^n$ gedefinieerd d.m.v. open verzamelingen in $\mathbb{R}^n$ (en niet in V zoals in definitie 1.7.7). We kunnen gelukkig gemakkelijk van de ene vorm overgaan op de andere (ook in een willekeurige topologische ruimte X):
als $V \subseteq X$ en als $V = \bigcup_i U_i$ met U_i open in V, dan is $U_i = W_i \cap V$ voor zekere W_i open in X, zodat $V \subseteq \bigcup_i W_i$. Omgekeerd, als $V \subseteq \bigcup_i W_i$ met W_i open in X, dan is $V = \bigcup_i U_i$ met $U_i := W_i \cap V$ open in V. We zullen in het vervolg ook van deze equivalente vorm van bedekking (en dus ook van compactheid) van een deelverzameling gebruik maken.

[40] Een topologische ruimte waarin elke open bedekking een aftelbare deelbedekking heeft, wordt een **Lindelöf-ruimte** genoemd.

[41] d.w.z., $A := \{n \in \mathbb{N} : (\exists i, j)(B_n = B_{i,j})\}$

[42] ook genaamd: *Stelling van Borel-Lebesgue*

Verdere ontwikkelingen 1.7.A. D.m.v. een gelijkaardige veralgemening op de kardinaliteit kunnen we het convergentiebegrip van rijen uitbreiden tot families van hogere kardinaliteit. Een aantal eigenschappen van rijen die enkel gelden in eerste aftelbaarheidsruimten krijgen zo een vorm die wel blijft gelden in willekeurige topologische ruimten. Er zijn twee verschillende manieren ontwikkeld om dit te doen: via zgn. *filters* en via zgn. *netten* (§1.13). We bespreken hier convergentie van filters.

Zoals in het bewijs van eigenschap 1.7.3 associëren we met een rij $(x_n)_n$ in (X,τ) de dalende rij van verzamelingen $A_n := \{x_m : m \geqslant n\}$. Dan is

$$x_n \to x \iff (\forall U \in \tau, x \in U)(\exists n \in \mathbb{N})(A_n \subseteq U).$$

Naar analogie hiervan definiëren we:

Definitie 1.7.B. Zij $\mathscr{F}$ een familie van nietlege deelverzamelingen van X die gesloten is onder eindige doorsneden. Dan convergeert $\mathscr{F}$ naar $x \in X$ (notatie: $\mathscr{F} \to x$) als

$$(\forall U \in \tau, x \in U)(\exists A \in \mathscr{F})(A \subseteq U).$$

Deze definitie van convergentie vereenvoudigt (en is daardoor handiger in het gebruik) als we ons beperken tot zgn. filters:

Definitie 1.7.C. Een **filter** $\mathscr{F}$ op een verzameling X is een verzameling van deelverzamelingen van X waarvoor

(F1) $\varnothing \notin \mathscr{F}$

(F2) $\mathscr{F}$ is gesloten onder eindige doorsneden (d.w.z., $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{F}$)

(F3) $A \in \mathscr{F}, A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow B \in \mathscr{F}$.

Eigenschap 1.7.D (Filter-convergentie). *Een filter $\mathscr{F}$ op X convergeert naar $x \in X$ als en slechts als elke omgeving van x tot $\mathscr{F}$ behoort.*

Opmerking 1.7.E. Als een familie $\mathscr{F}$ van nietlege deelverzamelingen van X gesloten is onder eindige doorsneden, dan kunnen we $\mathscr{F}$ steeds uitbreiden tot de filter $\mathscr{G} = \{A \subseteq X : (\exists B \in \mathscr{F})(B \subseteq A)\}$, en er geldt: $\mathscr{F} \to x \iff \mathscr{G} \to x$.
Men beperkt zich daarom meestal tot convergentie van filters.

Als $\mathscr{F}$ een filter is op X en f een afbeelding $X \to Y$, dan is $f(\mathscr{F}) = \{f(A) : A \in \mathscr{F}\}$ niet noodzakelijk filter op Y. We werken daarom in de plaats met $f_*(\mathscr{F}) := \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathscr{F}\}$, hetgeen wel een filter is op Y. Naar analogie van het rijenkenmerk voor continuïteit vinden we

Stelling 1.7.F. *Zij X, Y topologische ruimten. Als f een afbeelding $X \to Y$ is, dan zijn equivalent:*

1. *f is continu in $a \in X$*
2. *$f_*(\mathscr{F}) \to f(a)$ voor elke filter $\mathscr{F}$ op X waarvoor $\mathscr{F} \to a$.*

Bewijs. Noteer de verzameling van alle omgevingen van x d.m.v. $\mathscr{V}_x$. Merk op dat dit zelf een filter is. Dan is f continu in a als en slechts als $f^{-1}(U) \in \mathscr{V}_a$ voor elke $U \in \mathscr{V}_{f(a)}$. Door de definitie van $f_*(\mathscr{V}_a)$ betekent dit juist dat $\mathscr{V}_{f(a)} \subseteq f_*(\mathscr{V}_a)$.
$\Rightarrow$: als $\mathscr{F} \to a$, dan is $\mathscr{V}_a \subseteq \mathscr{F}$, zodat ook $\mathscr{V}_{f(a)} \subseteq f_*(\mathscr{V}_a) \subseteq f_*(\mathscr{F})$, en dus $f_*(\mathscr{F}) \to f(a)$.
$\Leftarrow$: kies $\mathscr{F} := \mathscr{V}_a$. $\square$

D.m.v. dit extra taalgebruik kunnen een aantal eigenschappen over topologische ruimten bewezen worden m.b.v. filters op een analoge manier als eigenschappen over eerste-aftelbaarheidsruimten bewezen worden m.b.v. rijen.

Oefening 1.7.15. (D)

1. Toon aan dat de unie van twee compacte deelverzamelingen van een topologische ruimte compact is.
2. Toon aan dat een eindige deelverzameling van een topologische ruimte compact is.

Oefening 1.7.16. (D)Geef een voorbeeld van een open bedekking van het open interval $]0,1[$ die geen eindige deelbedekking heeft.

Oefening 1.7.17. Zij X, Y topologische ruimten.

1. (B)Zij $(x_n)_n$ een rij in X met $x_n \to a \in X$. Toon aan dat $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ compact is.
2. (M)Zij f een afbeelding $X \to Y$. Toon aan: als X aftelbaar van de eerste soort is, en als de restrictie van f tot elke compacte deelverzameling van X continu is, dan is ook f continu.
3. (M)Zij f een afbeelding $X \to Y$ tussen Hausdorff eerste aftelbaarheidsruimten met de eigenschap dat $f^{-1}(K)$ compact is, voor elke compacte $K \subseteq Y$. Toon aan dat f gesloten deelverzamelingen van X afbeeldt op gesloten deelverzamelingen van Y.
4. (M)Zij f een injectieve afbeelding $X \to Y$ tussen Hausdorff eerste aftelbaarheidsruimten die compacte verzamelingen afbeeldt op compacte verzamelingen. Toon aan: f is continu.
5. (B)Geef een voorbeeld van een afbeelding $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die compacte verzamelingen afbeeldt op compacte verzamelingen, maar die niet continu is.
6. (M)Geef een voorbeeld van een afbeelding $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met de eigenschap dat $f^{-1}(K)$ compact is, voor elke compacte $K \subseteq \mathbb{R}$, maar die niet continu is.

1.8 Compactheid: eigenschappen en voorbeelden

Definitie 1.7.12 laat opnieuw elegante bewijsvoeringen toe in de algemene context van topologische ruimten, eens we enkele basiseigenschappen over compactheid afgeleid hebben. Het *verwisselen van quantoren*, hoewel vrij algemeen toepasbaar, hoeven we niet altijd formeel door te voeren (gelukkig, want zulke bewijzen zijn soms eerder technisch). De formulering met open verzamelingen suggereert, informeel geformuleerd, dat we topologische vragen over een oneindige (compacte) verzameling kunnen herleiden tot vragen over een eindige verzameling. Omdat definitie 1.7.12 nogal abstract is, leiden we eerst een aantal eigenschappen af die helpen om compacte verzamelingen te herkennen:

Stelling 1.8.1.

1. *Een gesloten deelruimte V van een compacte topologische ruimte X is compact.*
2. *Een compacte deelruimte K van een Hausdorff-ruimte X is gesloten.*

Bewijs. 1. Zij $V \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ voor zekere open U_i in X. Dan is $X = (X \setminus V) \cup \bigcup_{i\in I} U_i$. Omdat ook $X \setminus V$ open is, bestaat een eindige deelbedekking $X = (X \setminus V) \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. Hieruit volgt dat $V \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.
2. Kies willekeurig $x \in X \setminus K$. We tonen aan dat x een inwendig punt is van $X \setminus K$. (Daaruit volgt dan dat $X \setminus K$ open is, en dus K gesloten.)
Omdat X Hausdorff is, bestaan voor elke $y \in K$ disjuncte open verzamelingen $U_y \ni x$ en $W_y \ni y$. Omdat $K \subseteq \bigcup_{y\in K} W_y$ en K compact is, is er een eindige deelbedekking $K \subseteq W_{y_1} \cup \cdots \cup W_{y_n}$. Dan is $U := U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ een omgeving van x. Bovendien is $U \subseteq X \setminus K$, want voor elke k is $U \cap W_{y_k} \subseteq U_{y_k} \cap W_{y_k} = \varnothing$, zodat ook $U \cap K \subseteq U \cap (W_{y_1} \cup \cdots \cup W_{y_n}) = \varnothing$. □

Hieruit volgt dat definitie 1.7.12 overeenstemt met de definitie uit Analyse II:

Stelling 1.8.2. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ is compact (volgens def. 1.7.12) als en slechts als V gesloten en begrensd is.*

Bewijs. $\Rightarrow$: $\mathbb{R}^n$ is (zoals elke metrische ruimte) Hausdorff, zodat V gesloten is door stelling 1.8.1. V is ook begrensd, want de open bedekking $(B(0,n))_{n\in\mathbb{N}}$ van V heeft een eindige deelbedekking.
$\Leftarrow$: aangetoond in Analyse II (stelling van Heine-Borel). □

Stelling 1.8.3 (Compactheid is een continue invariant)**.** *Zij X, Y topologische ruimten. Zij f een continue afbeelding $X \to Y$. Als X compact is, dan is ook $f(X)$ compact.*

Bewijs. Zij $(U_i)_{i\in I}$ een open bedekking van $f(X)$. Omdat f continu is, is $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ een open bedekking van X, die bij veronderstelling een eindige deelbedekking $(f^{-1}(U_{i_1}), \ldots, f^{-1}(U_{i_n}))$ heeft. Dan is $(U_{i_1}, \ldots, U_{i_n})$ een eindige deelbedekking van $f(X)$. □

Stelling 1.8.3 geeft ons veel voorbeelden van compacte verzamelingen in topologische ruimten. Zo is bijv. (het beeld van) een continue kromme in een topologische ruimte steeds compact. We leiden er nu ook veralgemeningen uit af van belangrijke stellingen uit $\mathbb{R}^n$.

Definitie 1.8.4. Een afbeelding $X \to Y$ (X, Y topologische ruimten) is **gesloten** als ze gesloten deelverzamelingen van X afbeeldt op gesloten deelverzamelingen van Y.

Lemma 1.8.5.

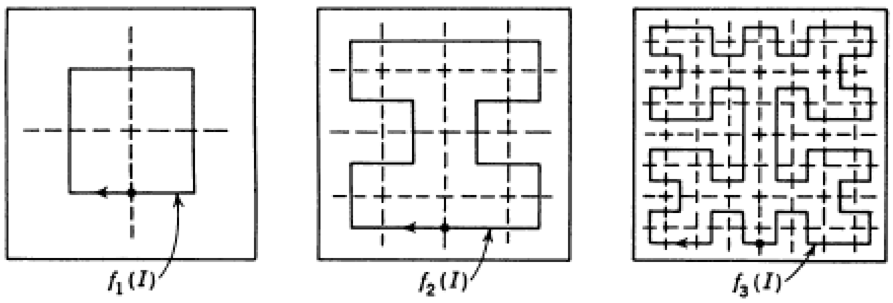
1. *Zij X een compacte ruimte en Y Hausdorff. Dan is elke continue afbeelding $f\colon X \to Y$ gesloten.*
2. *Elke injectieve, continue en gesloten afbeelding $f\colon X \to Y$ is een homeomorfisme $X \to f(X)$.*

Bewijs. 1. Zij $V \subseteq X$ gesloten. Dan is V compact door eigenschap 1.8.1. Wegens stelling 1.8.3 is ook $f(V)$ compact, en dus gesloten in $f(X)$ door eigenschap 1.8.1.

2. Wegens stelling 1.4.2 is $f^{-1}\colon f(X) \to X$ continu zodra $(f^{-1})^{-1}(V) = f(V)$ gesloten is in $f(X)$ voor elke gesloten $V \subseteq X$. □

Gevolg 1.8.6 (Stelling van de continue inverse)**.** *Zij X een compacte ruimte en Y Hausdorff. Elke injectieve, continue afbeelding $f\colon X \to Y$ is een homeomorfisme $X \to f(X)$.*

Opmerking 1.8.7. Als X niet compact is, geldt de voorgaande stelling niet noodzakelijk. Een tegenvoorbeeld is de afbeelding $f\colon [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2\colon f(t) = (\cos t, \sin t)$ (zie ook oef. 1.8.33).



Figuur 1.3: Beelden $f_n(I) = f_n([0,1])$ van opeenvolgende benaderingen van een vlakvullende kromme.

Voorbeeld 1.8.8. Een verrassend verschijnsel in de topologie van het vlak is het bestaan van zgn. **vlakvullende** krommen, d.w.z. continue krommen $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]\times[0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ waarvoor $\varphi([0,1]) = [0,1]\times[0,1]$.
Men kan zulke φ construeren als gelijkmatige limiet van een rij van stuksgewijs lineaire afbeeldingen f_n (door gelijkmatige convergentie is dan ook de limietfunctie φ continu).
Uit stelling 1.8.6 volgt dat zulke vlakvullende kromme φ nooit bijectief kan zijn (oefening (B)).

Stelling 1.8.9 (Extremumstelling van Weierstrass)**.** *Zij X een compacte topologische ruimte en f een continue afbeelding $X \to \mathbb{R}$. Dan bereikt f een (globaal) maximum en minimum.*

Bewijs. Wegens stelling 1.8.3 is $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ compact. I.h.b. is $f(X)$ begrensd, zodat $\sup f(X) < +\infty$. Omdat $f(X)$ ook gesloten is, is bovendien $\sup f(X) \in f(X)$, d.w.z., $\sup f(X) = \max f(X)$. Analoog is $\inf f(X) = \min f(X)$. □

Lemma 1.8.10. *Zij $\mathscr{B}$ een basis van een topologische ruimte X. Als elke bedekking van X met elementen van $\mathscr{B}$ een eindige deelbedekking heeft, dan is X compact.*

Bewijs. Oefening (D). □

Stelling 1.8.11. *Als X en Y compact zijn, dan is ook $X \times Y$ compact.*

Bewijs. Zij $\mathscr{U}$ een bedekking van $X \times Y$ met elementen uit de basis die de producttopologie definieert (zie 1.4.19). Kies een $y \in Y$. Voor elke $x \in X$ bestaat een verzameling $U_x \times V_x$ van de bedekking $\mathscr{U}$ (met dus $U_x \in \tau_X$ en $V_x \in \tau_Y$) waarvoor $(x,y) \in U_x \times V_x$. Dan is $X = \bigcup_{x\in X} U_x$. Omdat X compact is, bestaat een eindige deelbedekking $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Dan is

$$X \times W_y \subseteq U_{x_1} \times V_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} \times V_{x_n},$$

met $W_y := V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n} \in \tau_Y$.
We kunnen dit nu doen voor gelijk welke $y \in Y$, en vinden dus voor elke $y \in Y$ een open $W_y \ni y$ met de eigenschap dat $X \times W_y$ door een eindig aantal elementen uit $\mathscr{U}$ bedekt wordt. Omdat $Y = \bigcup_{y\in Y} W_y$ compact is, bestaat een eindige deelbedekking $Y = W_{y_1} \cup \cdots \cup W_{y_m}$. Dan wordt ook $X \times Y = \bigcup_{j=1}^{m} X \times W_{y_j}$ door een eindig aantal verzamelingen uit $\mathscr{U}$ bedekt. □

Opmerking 1.8.12. Eigenschappen over compactheid kunnen dikwijls vermoed worden door *verwisselen van quantoren*[43] (opm. 1.7.4). We illustreren deze techniek a.d.h.v. een stelling van Dini.

Zoals in $\mathbb{R}^n$ definiëren we:

Definitie 1.8.13. Zij V een verzameling en M een metrische ruimte. Een rij $(f_n)_n$ van afbeeldingen $V \to M$ **convergeert gelijkmatig** naar een afbeelding $f\colon V \to M$ als $\sup_{x\in V} d(f_n(x), f(x)) \to 0$ als $n \to +\infty$, m.a.w., als

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(\forall x \in V)\big(d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\big).$$

Lemma 1.8.14. *Zij X een topologische ruimte en f, g continue afbeeldingen $X \to \mathbb{R}$. Dan is ook $f - g$ continu $X \to \mathbb{R}$.*

Bewijs. Oefening (B). □

Stelling 1.8.15 (Dini)**.** *Zij K een compacte topologische ruimte en zij $(f_n)_n$ een dalende rij (d.w.z., $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots$) van continue afbeeldingen $K \to \mathbb{R}$. Als $(f_n)_n$ puntsgewijs convergeert op K naar een continue afbeelding $g\colon K \to \mathbb{R}$, dan is de convergentie gelijkmatig.*

Bewijs. We mogen aannemen dat $g = 0$ (beschouw desnoods de rij $(f_n - g)_n$). Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Vergelijken van het gegeven en het te bewijzen leert dat we quantoren wensen te verwisselen in

$$(\forall x \in K)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(|f_n(x)| < \varepsilon).$$

Omdat f_n dalend zijn met $\lim_n f_n = 0$, is $(\forall n \geqslant N)(|f_n(x)| < \varepsilon)$ in feite equivalent met $f_N(x) < \varepsilon$. We stellen daarom

$$U_n := \{x \in K : f_n(x) < \varepsilon\} = f_n^{-1}(]-\infty, \varepsilon[), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Omdat f_n continu is, is U_n open. Bijgevolg is $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een open bedekking van K. Omdat K compact is en $(U_n)_n$ stijgend is, is dus $K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_N = U_N$ voor zekere $N \in \mathbb{N}$. □

Oefening 1.8.16. (D)Geef een voorbeeld van een compacte deelverzameling van de triviale topologie op een verzameling X die niet gesloten is.

Oefening 1.8.17 (Lokaal gelijkmatige convergentie)**.** (B)Zij $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ open. Zij $(f_n)_n$ een rij van afbeeldingen $\Omega \to \mathbb{R}^m$. Toon aan dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

1. $(f_n)_n$ convergeert gelijkmatig over elke compacte $K \subseteq \Omega$
2. $(f_n)_n$ convergeert gelijkmatig over elke gesloten bal $B \subseteq \Omega$
3. voor elke $x \in \Omega$ bestaat een omgeving van x waarover $(f_n)_n$ gelijkmatig convergeert.

Oefening 1.8.18. (B)Zij X een compacte topologische ruimte en zij f een afbeelding $X \to \mathbb{R}$ met de eigenschap dat elke $x \in X$ een omgeving heeft waarop f een minimum bereikt. Toon aan dat f een minimum bereikt op X.

[43] In stelling 1.8.9 wensen we bijv. quantoren te verwisselen in $(\forall y \in X)(\exists x \in X)(f(x) \geqslant f(y))$.

Oefening 1.8.19. (M)Zij X een compacte topologische ruimte en M een metrische ruimte. Zij f, g continue afbeeldingen $X \to M$. Veronderstel dat de vergelijking $f(x) = g(x)$ benaderende oplossingen heeft tot op willekeurige nauwkeurigheid, d.w.z., voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat $x \in X$ met $d(f(x), g(x)) \leqslant \varepsilon$. Toon aan dat de vergelijking dan een oplossing heeft.

Oefening 1.8.20. (B)Zij X een topologische ruimte met de eigenschap dat elke $x \in X$ een samenhangende omgeving heeft.

1. Toon aan dat de samenhang-componenten van X open zijn.
2. Als X een aftelbare basis heeft, toon dan aan dat X aftelbaar veel samenhang-componenten heeft.
3. Als X compact is, toon dan aan dat X eindig veel samenhang-componenten heeft.
4. Als Y een topologische ruimte is en f een afbeelding $X \to Y$ die continu en open is, toon dan aan dat elke $y \in f(X)$ een samenhangende omgeving heeft.
5. Als X een aftelbare basis heeft en f is een continue afbeelding $X \to \mathbb{R}$, toon dan aan dat $f(X) = U \cup Q$, met U open en Q aftelbaar.

Oefening 1.8.21. Zij K, L compacte deelverzamelingen van een Hausdorff-ruimte X. Toon aan:

1. (B)Als $x \in X \setminus K$, dan bestaan $U, V \in \tau_X$ met $x \in U$, $K \subseteq V$ en $U \cap V = \varnothing$.
2. (B)Als $K \cap L = \varnothing$, dan bestaan $U, V \in \tau_X$ met $K \subseteq U$, $L \subseteq V$ en $U \cap V = \varnothing$.
3. (B)Een compacte Hausdorff-ruimte is regulier.

Oefening 1.8.22. Zij X, Y en Z topologische ruimten met X compact en Y Hausdorff. Zij f een continue surjectieve afbeelding $X \to Y$ en g een afbeelding $Y \to Z$. Als $g \circ f$ continu is, toon dan aan dat ook g continu is.

Oefening 1.8.23. (M)Zij (X, τ) een compacte Hausdorff-ruimte. Toon dan aan:

1. er bestaat geen (strikt) zwakkere Hausdorff-topologie τ' op X.
2. er bestaat geen (strikt) sterkere compacte topologie τ' op X.

Oefening 1.8.24. (M)Gegeven is een compacte topologische ruimte X en een verzameling M voorzien van twee equivalente metrieken d_1 en d_2. Toon aan dat dan ook de metrieken

$$d_{j,\infty} : \mathscr{C}(X, M) \times \mathscr{C}(X, M) \to \mathbb{R} : d_{j,\infty}(f, g) := \sup_{x \in X} d_j(f(x), g(x)) \qquad (j = 1, 2)$$

equivalent zijn.

Oefening 1.8.25. (B)Toon de volgende uitbreiding van de extremumstelling 1.8.9 aan:
Gegeven is een compacte topologische ruimte X en een topologische ruimte Y die voorzien is van een partiële[44] orderelatie $\leqslant$ waarvoor $L_a := \{y \in Y : y < a\}$ open is voor elke $a \in Y$.[45] Verder is f een continue afbeelding $X \to Y$. Toon aan dat dan een maximaal element $y_{\max} \in f(X)$ bestaat (d.w.z. dat voor geen enkele $y \in f(X)$ geldt dat $y > y_{\max}$).

[44] d.w.z. dat er onvergelijkbare elementen kunnen zijn, m.a.w. er geldt niet noodzakelijk steeds $x \leqslant y$ of $y \leqslant x$

[45] bij definitie geldt $x < y \iff x \leqslant y \;\&\; x \neq y$

Oefening 1.8.26.

1. (B)Zij (X,τ) een niet-compacte Hausdorff-ruimte en $\varnothing \neq U \in \tau$ met $\overline{U}$ compact. Zij K een compacte deelverzameling van X waarvoor K° en $X \setminus K$ samenhangend zijn. Als $\partial U \subseteq \partial K$, toon dan aan dat $U = K^\circ$.

2. (B)Zij X, Y topologische ruimten, Y Hausdorff en niet-compact, $K \subset\subset X$, $L \subset\subset Y$, $K^\circ \neq \varnothing$, f een continue afbeelding $K \to Y$ die een open afbeelding $K^\circ \to Y$ is. Veronderstel dat L° en $Y \setminus L$ samenhangend zijn. Als $f(\partial K) \subseteq \partial L$, toon dan aan dat $f(K^\circ) = L^\circ$.

Oefening 1.8.27. (B)Zij $X \neq \varnothing$ een compacte Hausdorff-ruimte en f een continue afbeelding $X \to X$. We definiëren recursief $X_0 := X$ en $X_{n+1} := f(X_n)$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Noem $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Toon aan dat $A \neq \varnothing$ en dat $f(A) = A$.

Oefening 1.8.28. (M)Zij X een Hausdorff-ruimte. Zij Y een dichte deelruimte van X die (met de relatieve topologie) een lokaal compacte (def. 1.9.6) topologische ruimte is. Toon aan dat Y open is in X.

Oefening 1.8.29.

1. (B)Zij X, Y compacte topologische ruimten en V een gesloten deelverzameling van $X \times Y$. Toon aan dat $\mathrm{pr}_2(V)$ compact is.

2. (B)/(M)Zij X, Y Hausdorff eerste aftelbaarheidsruimten met X rijcompact. Zij V een gesloten deelverzameling van $X \times Y$. Toon aan dat $\mathrm{pr}_2(V)$ gesloten is in Y.

Oefening 1.8.30. (B)Geef een voorbeeld van een rij van continue afbeeldingen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die puntsgewijs convergeert naar een continue afbeelding f, maar die niet gelijkmatig convergeert.

Oefening 1.8.31. Gegeven is een bedekking $(V_i)_{i\in I}$ van een topologische ruimte X. Dan is $(V_i)_{i\in I}$ **lokaal eindig** als elk punt x van X een omgeving W heeft waarvoor $\{i \in I : V_i \cap W \neq \varnothing\}$ eindig is. Toon aan:

1. (B)Als $(V_i)_{i\in I}$ lokaal eindig is, dan is $\{i \in I : V_i \cap K \neq \varnothing\}$ eindig voor elke compacte $K \subseteq X$.

2. (D)Als $X = \mathbb{R}$ en $\{i \in I : V_i \cap K \neq \varnothing\}$ eindig is voor elke compacte $K \subseteq X$, dan is $(V_i)_{i\in I}$ lokaal eindig.

3. (M)Als X een eerste aftelbaarheidsruimte is en $\{i \in I : V_i \cap K \neq \varnothing\}$ eindig is voor elke compacte $K \subseteq X$, dan is $(V_i)_{i\in I}$ lokaal eindig.

Oefening 1.8.32. (B)Breid de stelling van Dini uit tot de volgende stelling:
Zij K een compacte topologische ruimte, M een metrische ruimte en zij $(f_n)_n$ een rij van continue afbeeldingen $K \to M$. Als $(f_n)_n$ puntsgewijs monotoon convergeert op K naar een continue afbeelding $g\colon K \to \mathbb{R}$ (d.w.z., $d(f_n(x), g(x))_n$ convergeert dalend naar 0), dan is de convergentie gelijkmatig.

Oefening 1.8.33.

1. (M)Toon aan dat een injectieve continue afbeelding $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (met I een interval) een continue inverse heeft.

2. (D)Toon aan dat de inverse van de afbeelding $f\colon\ [0,2\pi[\ \to \mathbb{R}^2\colon\ f(t) = (\cos t, \sin t)$ niet continu is.

3. (D)Toon aan dat
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{cases} f(0,t) = t, & \forall t \in [0,1[\\ f(1,t) = 1+t, & \forall t \in [0,1] \end{cases}$$
een continue functie is zonder continue inverse.

4. (D)Toon aan dat de identieke afbeelding $(\mathbb{R}, \tau_{discr}) \to (\mathbb{R}, \tau_{Eucl})$ een continue afbeelding zonder continue inverse is (hierbij is τ_{discr} de discrete en τ_{Eucl} de Euclidische topologie).

Verdere ontwikkelingen 1.8.34. Men kan aantonen dat elke injectieve continue afbeelding $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (met U een open verzameling) een continue inverse heeft (zgn. **invariantie van domein**). Dit resultaat wordt meestal bewezen m.b.v. algebraïsche topologie (bijv. d.m.v. de fixpuntstelling van Brouwer).

1.9 Compactificaties

In Analyse I en II hebben we gemerkt dat het soms nuttig is om elementen $\pm\infty$ toe te voegen aan $\mathbb{R}$, en dat voor divergentie naar $\pm\infty$ analoge rekenregels gelden als voor convergentie naar een punt $a \in \mathbb{R}$. We kunnen die analogie zonder moeite formeel maken in de context van topologische ruimten:

Voorbeeld 1.9.1. Noteer met τ de gewone topologie op $\mathbb{R}$ en noteer $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
We definiëren de topologie $\overline{\tau}$ op $\overline{\mathbb{R}}$ als de topologie met basis (zie 1.4.18)

$$\{]a,b[: a,b \in \mathbb{R}\} \cup \{]c,+\infty] : c \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty, c[: c \in \mathbb{R}\}.$$

M.a.w., we noemen $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ een omgeving van $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$ als $\begin{cases}]c,+\infty] \subseteq U \text{ voor zekere } c \in \mathbb{R} \\ [-\infty, c[\subseteq U \text{ voor zekere } c \in \mathbb{R} \\ U \text{ een } \tau\text{-omgeving van } a \text{ bevat.} \end{cases}$

Convergentie van een rij $(x_n)_n$ naar $+\infty$ (resp. $-\infty$) voor $\overline{\tau}$ valt dan juist samen met de definitie van divergentie uit Analyse I en II.
$(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau})$ is homeomorf met een compact deelinterval van $\mathbb{R}$. Breiden we (bijv.) de tangens tan: $]-\pi/2, \pi/2[\ \to \mathbb{R}$ uit met $\tan(-\pi/2) := -\infty$ en $\tan(\pi/2) := +\infty$, dan is dit een bijectie $[-\pi/2, \pi/2] \to [-\infty, +\infty]$. De omgevingen van $\pm\pi/2$ onder deze afbeelding corresponderen juist met de omgevingen van $\pm\infty$ in $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau})$, zodat die afbeelding een homeomorfisme is. I.h.b. is $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau})$ compact en samenhangend.

Analoog hebben we in de Complexe Analyse aan $\mathbb{C}$ een punt ∞ toegevoegd:

Voorbeeld 1.9.2. Noteer met τ de gewone topologie op $\mathbb{C}$ en noteer $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Noem $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ een omgeving van $\begin{cases} \infty \\ a \in \mathbb{C} \end{cases}$ als $\begin{cases} \overline{\mathbb{C}} \setminus B(0,r) \subseteq U \text{ voor zekere } r \in \mathbb{R} \\ U \text{ een } \tau\text{-omgeving van } a \text{ bevat.} \end{cases}$

Dan bepaalt dit een topologie $\overline{\tau}$ op $\overline{\mathbb{C}}$. Convergentie van een rij $(z_n)_n$ naar ∞ voor $\overline{\tau}$ valt dan juist samen met de definitie uit Complexe Analyse.
$\overline{\mathbb{C}}$ wordt het boloppervlak van Riemann genoemd omdat $(\overline{\mathbb{C}}, \overline{\tau})$ homeomorf is met een boloppervlak in $\mathbb{R}^3$. Inderdaad, $\mathbb{C}$ is homeomorf (zelfs isometrisch) met het vlak $\alpha := \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Bekijk nu een boloppervlak S in $\mathbb{R}^3$ dat aan α raakt in het punt $P_0 = (0,0,0)$. De (zgn. stereografische) projectie pr vanuit het diametraal tegenover gelegen punt P_∞ die elk punt $P \in S \setminus \{P_\infty\}$ afbeeldt op het snijpunt van de rechte PP_∞ met het vlak $\alpha \cong \mathbb{C}$ is een bijectie $S \setminus \{P_\infty\} \to \alpha \cong \mathbb{C}$. Breiden we dit uit met $\mathrm{pr}(P_\infty) := \infty$, dan definieert dit een afbeelding $S \to \overline{\mathbb{C}}$ waaronder de omgevingen van P_∞ in S (met de relatieve topologie uit $\mathbb{R}^3$) juist corresponderen met de omgevingen van ∞ in $\overline{\mathbb{C}}$. Ook $\overline{\mathbb{C}}$ is dus compact en samenhangend.

Definitie 1.9.3. Zij X een topologische ruimte. We noemen $V \subseteq X$ **dicht** in X als $\overline{V} = X$.

M.a.w., $V \subseteq X$ is dicht in X als V met elke nietlege open deelverzameling van X een element gemeen heeft.

Voorbeeld 1.9.4. $\mathbb{Q}$ is dicht in $\mathbb{R}$. Inderdaad, tussen elke twee verschillende reële getallen ligt een rationaal getal (cursus Analyse I).

In de vorige voorbeelden is $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) een dichte deelruimte van $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. $\overline{\mathbb{C}}$).
Omdat compactheid zo'n handige eigenschap is, is het in het algemeen nuttig om te weten of een niet-compacte ruimte kan ingebed worden in een compacte ruimte.

Definitie 1.9.5. Een compacte topologische ruimte (X', τ') wordt een **compactificatie** van een topologische ruimte (X, τ) genoemd als ze (X, τ) als dichte deelruimte bevat.

Bij uitbreiding wordt deze benaming ook gegeven aan elke topologische ruimte die homeomorf is met een compactificatie. Zo noemen we een boloppervlak ook een compactificatie van $\mathbb{C}$.

Definitie 1.9.6. Een Hausdorff-ruimte X wordt **lokaal compact** genoemd als elk punt $x \in X$ een compacte omgeving heeft.

Voorbeeld 1.9.7. $\mathbb{R}^n$ is lokaal compact, want elke $x \in \mathbb{R}^n$ heeft $\overline{B}(x,1)$ als compacte omgeving.

Definitie 1.9.8. Een compactificatie X' van een topologische ruimte X wordt een **eenpuntscompactificatie**[46] genoemd als $X' \setminus X$ juist één punt bevat.

Stelling 1.9.9. *Als (X, τ) een niet-compacte, lokaal compacte Hausdorff-ruimte is, dan is $X_\infty := X \sqcup \{\infty\}$ met de topologie*

$$\tau_\infty := \tau \cup \{X_\infty \setminus K : K \textit{ is een compacte deelverzameling van } X\}$$

een Hausdorff eenpuntscompactificatie van X.

Bewijs. Oefening (B). □

Een eenpuntscompactificatie laat soms toe om eigenschappen over compactheid over te dragen op lokaal compacte ruimten (oef. 1.9.13).
Intuïtief bepalen de extra punten van een compactificatie 'richtingen' waarlangs punten naar oneindig kunnen gaan. Naargelang de compactificatie onderscheidt men meer of minder zulke richtingen. Zo is bijv. ook $\overline{B}_{\mathbb{C}}(0,1)$ een compactificatie van $\mathbb{C}$ (want $\mathbb{C}$ is homeomorf met $B_{\mathbb{C}}(0,1)$).

---

[46] ook genaamd: *Alexandrov-compactificatie*

Oefening 1.9.10. (D) Zij X een topologische ruimte en $U, V \subseteq X$. Toon aan:

1. V is dicht in de deelruimte $\overline{V}$.

2. Als U dicht is in de deelruimte V en V dicht is in X, dan is ook U dicht in X.

Oefening 1.9.11. (D)Toon aan dat de discrete topologie (X, τ_{disc}) lokaal compact en Hausdorff is.

Oefening 1.9.12. (B)Geef een voorbeeld van een lokaal compacte Hausdorff-ruimte die niet compact is.

Oefening 1.9.13. (M)Breid het resultaat uit oef. 1.8.21.3 uit tot lokaal compacte Hausdorff-ruimten, m.a.w. toon aan dat elke lokaal compacte Hausdorff-ruimte X regulier is.

Oefening 1.9.14.

1. Toon aan dat een rij van reële getallen ofwel een convergente deelrij heeft, ofwel een die divergeert naar $+\infty$, ofwel een die divergeert naar $-\infty$.

2. Als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue afbeelding is waarvoor $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ en $\lim_{x\to-\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ bestaan, toon dan aan dat f een maximum bereikt op $\mathbb{R}$ of dat $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ of dat $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Oefening 1.9.15. Zij U, V deelverzamelingen van een topologische ruimte X.

1. (B)Zij $U \subseteq V$. Toon aan dat U dicht is in de deelruimte V als en slechts als $V \subseteq \overline{U}$.

2. (B)Zij U open (in X) en V dicht (in X). Toon aan dat $U \cap V$ dicht is in de deelruimte U.

3. (B)Zij $W \subseteq U \subseteq \overline{W}$, voor zekere open $W \subseteq X$ en V dicht in X. Toon aan dat $U \cap V$ dicht is in de deelruimte U.

1.10 Compleetheid

In $\mathbb{R}^n$ hadden we het handige kenmerk van Cauchy om convergentie van een rij na te gaan. Omdat het niet voor de hand ligt hoe de formulering kan veralgemeend worden tot topologische ruimten, onderzoeken we dit kenmerk eerst in metrische ruimten.

Definitie 1.10.1. Een rij $(x_n)_n$ in een metrische ruimte M is een **Cauchy-rij** als voor elke $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat voor elke $m, n \geqslant N$, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. We noteren deze eigenschap ook als $\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$.

Eigenschappen 1.10.2. *Zij M een metrische ruimte.*

1. *Een convergente rij in M is een Cauchy-rij.*

2. *Een deelrij van een Cauchy-rij in M is een Cauchy-rij.*

3. *Als een deelrij van een Cauchy-rij in M convergeert naar $x \in M$, dan convergeert ook de Cauchy-rij zelf naar x.*